Вариант 1.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,5,1,4,0),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (0,3,2,1,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,0,2,5,2),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (-2,-2,3,1,-2). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,-2,1)$, $\mathbf{e}_2 = (-2,3,1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,1,2)$;
$\mathbf{g}_1 = (-1,4,4)$, $\mathbf{g}_2 = (2,2,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,0,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 4x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 2x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 3x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,4,-2,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,2,-1,4,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,-1,0,0,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,3,1,1,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,0,2,5,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,-2,3,1,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,3,1,4,1), L_1)$ и $M_2((5,-1,3,4,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,0,5,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,5,-2,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 5 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 2.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,4,5,5,4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,3,4,3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,3,5,5),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,3,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,3,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,5,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_3 = (5,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 4x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 2x + 4,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 4 & 0\\ -2 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1\\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5\\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (0,0,-1,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,0,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2,3,1,4,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (4,-2,2,4,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-1,4,3,1,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (2,2,4,5,0)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((2,-1,2,-1,5), L_1)$ и $M_2((0,2,3,0,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (1,3,-2,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,1,-1,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 0\\ 3 & -1 & 5 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 3.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,5,4,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,3,3,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,5,5,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,4,5,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$\mathbf{e}_1 = (4,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (4,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 3x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 2x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (3,2,2,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,5,2,1,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,2,-1,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-1,3,2,3,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,5,1,2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (5,0,1,0,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((5,1,0,1,2), L_1)$ и $M_2((3,5,-1,5,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,4,-1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,-2,-2,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 4.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,5,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,5,4,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,5,5,3,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$\mathbf{e}_1 = (4,3,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (4,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 5x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 3x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 2x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 5x^2 + 5x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,4,-1,5,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,-1,3,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,-1,1,3)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,5,-2,5,1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,-1,-2,3,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,1,-2,1,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,3,4,2,5), L_1)$ и $M_2((2,-1,4,-1,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-2,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,0,3,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 5.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,4,3,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,5,5,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,3,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,5,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,4,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 3x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 2x + 5, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,-2,-1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,0,5,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,-1,4,-1,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,4,1,-1,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,3,0,-1,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,2,-1,-1,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,0,-2,-2,5), L_1)$ и $M_2((1,5,3,-2,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,0,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,0,-1,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 6.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,3,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,4,4,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,5,3,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,4,5,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,3,3)$, $\mathbf{e}_2 = (5,3,4)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 2x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 5x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,2,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,5,-1,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,4,-1,3)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,4,2,-1,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,3,1,-2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,2,0,-2,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,0,-2,-2,-2), L_1)$ и $M_2((4,5,4,-2,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,1,0,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,-1,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 7.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,4,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,5,4,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,4,3,3,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,3,3,5,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,4)$, $\mathbf{e}_2 = (5,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (4,4,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,4)$, $\mathbf{g}_2 = (4,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 4x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 3x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 2x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,1,1,3,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,5,-1,5,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,0,5,-1,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,-2,1,2,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (2,2,-2,4,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,5,4,-2,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,-1,3,4,2), L_1)$ и $M_2((-1,5,-1,0,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (4,-1,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,-2,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 8.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,4,3,3,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,3,3,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,3,3,3,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,4)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (3,4,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,3,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 5x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-2,0,-2,1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3,4,3,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,-2,1,5,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (2,5,5,0,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,0,3,2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (0,3,1,4,1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((0,5,-1,2,1), L_1)$ и $M_2((-2,3,3,-2,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (3,5,5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,0,3,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 9.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,3,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,3,3,3,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,5,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (4,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 5x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 5x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 5x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,2,4,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,2,1,3,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,1,-2,-1,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,1,-1,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,1,4,2,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,0,1,-2,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,-1,0,3,0), L_1)$ и $M_2((5,-2,2,2,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,5,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,5,5,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 10.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,3,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,4,5,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,3,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,3,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,3,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,5)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 2x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 2x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 5x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (0,-2,4,4,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,-2,1,0,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2,-2,-2,3,0)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (4,5,0,2,2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-1,5,4,-2,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (2,5,1,2,5)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((2,3,0,-1,-2), L_1)$ и $M_2((0,2,2,-2,1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,2,5,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 11.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,5,3,5,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,4,4,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,5,4,4),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,3,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,3,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,3,3)$, $\mathbf{e}_3 = (5,4,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (5,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 3x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 4x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 4x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,-2,5,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,-1,2,3,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,4,-2,0,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-1,4,5,3,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,0,1,0,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (5,5,5,-2,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((5,-1,4,2,1), L_1)$ и $M_2((3,0,4,4,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,5,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,4,2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 12.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,4,3,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,5,5,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,4,3,5,4),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,4,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (5,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (3,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,4)$, $\mathbf{g}_2 = (3,5,5)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 2x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 3x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 5x^2 + 2x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5\\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,-2,2,-1,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,-2,5,-2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,-2,2,2,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,-1,2,5,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,3,5,3,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,-1,1,0,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,2,1,4,5), L_1)$ и $M_2((2,2,0,-1,4), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-1,4,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,3,0,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 13.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,4,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,4,4,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,4,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (5,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,5,5)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 2x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 3x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,5,-1,3,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,-2,2,2,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,-1,5,1,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,0,3,0,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,1,-2,-1,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,2,1,-2,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,0,0,1,3), L_1)$ и $M_2((1,2,-2,-1,-2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,4,-1,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,2,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 14.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,5,5,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,4,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,5,5,5,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,5,4,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,3,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,5,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_3 = (5,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 4x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 5x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,-2,-1,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,-1,2,2,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,5,2,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,1,3,0,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,2,-2,-1,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,3,1,-1,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,1,0,1,5), L_1)$ и $M_2((4,3,-2,0,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,-1,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-2,2,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 15.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,5,3,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,4,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,3,3,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,4,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 2x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 3x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (0,0,0,1,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,5,2,2,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2,2,4,3,3)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (4,5,0,5,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,2,2,-2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (2,0,4,-1,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((2,2,3,1,-2), L_1)$ и $M_2((0,5,-1,3,-2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,5,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,2,-1,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 16.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,4,4,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,3,4,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,5,4,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,4,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,4,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 5x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 2x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-2,4,-1,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,4,-2,0,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,1,0,1,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,4,4,4,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (2,1,-2,5,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,-1,0,-2,3)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,1,-1,-1,0), L_1)$ и $M_2((-1,4,3,1,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (4,4,1,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,1,3,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 17.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,5,5,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,3,5,4),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,4,5,3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,5,5,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,3,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (4,5,3)$, $\mathbf{g}_3 = (5,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 4x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 2x^2 + 5x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 & -2\\ 4 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 5 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-2,3,1,-1,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,5,2,2,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,-1,3,5,-1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (2,2,5,3,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,4,-2,-2,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (0,-2,-1,1,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((0,5,-2,1,4), L_1)$ и $M_2((-2,1,0,-1,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-2,3,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,0,4,3)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0\\ 5 & 5 & -2 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 18.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,4,3,3,3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,3,4,3,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,5,5,3,5),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,3,3,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (5,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 3x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 5x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 3x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2\\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,2,2,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,4,2,2,-1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,-1,4,0,2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,1,5,3,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,3,-2,5,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,2,-2,5,3), L_1)$ и $M_2((1,-2,0,3,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,3,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,4,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0\\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 19.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,5,4,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,3,5,4,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,5,4,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,5,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,3,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 5x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 3x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,-1,1,-2,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,1,3,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,4,1,0,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,0,1,1,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-1,-1,1,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,5,1,3,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,0,0,1,3), L_1)$ и $M_2((4,5,0,3,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-1,0,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 20.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,5,3,4,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,5,3,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,3,4,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 2x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 4x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 3x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (3,2,4,1,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,4,5,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,4,2,3)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-1,4,4,4,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,2,4,1,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (5,0,4,5,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((5,4,4,4,1), L_1)$ и $M_2((3,0,4,-2,1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,4,4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,2,4,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 21.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,4,5,4,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,4,5,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,3,5,5),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,5,5,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,5,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,5,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,5,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 4x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 3x + 5,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 2x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1\\ 5 & 5 & -2 & -2 & -1 & -1\\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,4,0,5,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,-2,-1,4,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,-2,3,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,-1,4,0,0)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,2,3,-1,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,5,2,5,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,4,2,2,4), L_1)$ и $M_2((2,2,0,0,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,-2,4,2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & -1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 22.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,4,5,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,3,3,5,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,3,5,5,5),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,4,3,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,4,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 2x^2 + 5,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 5x + 4,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 3x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5\\ 3 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,0,-2,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,-1,5,-1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,3,-2,3,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,1,4,1,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,4,3,-1,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,-1,2,-2,1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,-2,2,3,1), L_1)$ и $M_2((5,4,0,0,5), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,4,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,4,3)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 5 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 23.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,3,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,5,4,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,5,3,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,3,3,3,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_2 = (5,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,4,3)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 2x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 2x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 5x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,-1,5,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,5,-2,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,0,3,-2,-2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,-1,-1,-1,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,-2,5,0,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,-2,3,0,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,1,3,4,-1), L_1)$ и $M_2((1,0,-1,5,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,-2,1,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,-2,-1,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 24.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,5,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,3,4,3,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,5,3,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (3,5,3)$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{g}_3 = (5,5,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 2x^2 + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 5x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (0,1,2,4,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,0,4,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2,-1,-2,5,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (4,-2,2,-2,1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,-2,0,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (2,5,-2,-1,1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((2,1,-1,3,2), L_1)$ и $M_2((0,0,3,4,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,-2,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,3,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 25.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,4,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,4,5,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,5,4,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,3,4,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,5,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 5x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 5x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 5 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-1,5,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,2,0,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,-1,-1,2,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,-1,1,-1,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,3,-2,1,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,-1,3,3,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,-1,4,-2,4), L_1)$ и $M_2((-1,-1,-2,2,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,2,5,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,-2,2,4)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 26.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,4,3,5,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,3,4,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,3)$, $\mathbf{e}_2 = (5,3,3)$, $\mathbf{e}_3 = (4,4,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,3)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 3x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 3x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,5,4,2,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,1,1,5,4)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,5,-1,-1,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,5,1,4,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,1,-2,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,5,3,0,3)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,4,3,3,5), L_1)$ и $M_2((2,4,5,-1,1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (3,0,4,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,4,1,0)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 27.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,4,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,5,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,4,4,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,5,3,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (5,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,4,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (5,5,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 5x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 5x + 5, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 2x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,-2,3,-2,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,-2,-1,2,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,-1,3,-2,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,0,3,-1,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,0,-1,3,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,1,3,-1,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,5,4,0,2), L_1)$ и $M_2((5,-2,4,0,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,-1,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,4,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 28.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,5,4,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,4,4,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,3,3,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,5,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (5,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (5,4,4)$, $\mathbf{g}_3 = (5,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 5x^2 + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 2x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,2,-2,1,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,2,2,5,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,3,-2,1,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,4,-2,2,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,4,2,-2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,5,-2,2,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,1,-1,3,2), L_1)$ и $M_2((5,2,-1,3,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,3,3,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,4,-1,4)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 29.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,3,3,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,4,4,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,5,5,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,5,3,3,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,3,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,4,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 5x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 2x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,0,-1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,2,3,5,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,-2,3,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,1,5,-1,1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,-2,0,5,4)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,3,3,3,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,4,3,3,2), L_1)$ и $M_2((4,-2,2,-1,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,2,-2,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 30.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,5,3,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,3,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,4,5,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,5,3,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (5,3,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 4x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 5x + 5, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 2x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 5 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-1,-1,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,4,2,-2,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,2,5,4,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,4,3,0,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,1,-1,-2,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,-2,2,4,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,-2,2,4,0), L_1)$ и $M_2((-1,0,1,0,5), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,-1,2,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4,5,0)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 31.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,5,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,3,3,5,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (5,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,4,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (4,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 4x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,5,5,1,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,-1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,1,0,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,4,5,0,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,5,-1,0,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,-1,2,-1,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,3,2,-2,4), L_1)$ и $M_2((2,-2,-1,-2,5), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,3,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,4,-1,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 32.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,5,5,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,5,3,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,5,4,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,5,5,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (4,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_3 = (5,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 3x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 4x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 2x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 4x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,-2,0,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-1,2,0,4)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,1,4,-1,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,4,0,-1,2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,-2,2,-1,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,-1,4,-1,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,4,5,5,1), L_1)$ и $M_2((1,-1,1,5,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,3,0,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,2,4)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 33.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,4,3,3,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,5,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,4,3,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,3,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 4x^2 + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 2x + 5, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,-2,1,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,2,4,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,3,3,-2,-2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,-1,-2,1,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,5,-1,3,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,3,0,4,1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,3,1,2,0), L_1)$ и $M_2((1,0,3,5,5), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,2,-1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,0,0,3)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 34.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,3,3,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,5,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,5,3,5,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,5,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,4,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,4,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 5x^2 + 3x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,0,0,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,3,1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,1,2,3,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,5,4,-2,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,3,5,0,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,1,-2,2,5)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,2,0,-1,3), L_1)$ и $M_2((4,-2,2,2,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,0,5,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-2,-2,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 35.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,5,4,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,4,5,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,3,4,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,5,4,5,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (4,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 3x^2 + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 4x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,0,5,5,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,3,5,0,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,5,5,4,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,2,5,3,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (2,5,5,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,0,-2,2,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,4,-1,-2,5), L_1)$ и $M_2((-1,2,-1,5,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (4,1,0,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4,0,3)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 36.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,4,3,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,3,5,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,3,3,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,4,5,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,4,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,5,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 3x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 2x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 4x^2 + 4x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-2,5,-1,0,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,-1,-1,4,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,2,-1,-1,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (2,-1,0,-2,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,2,0,2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (0,4,0,5,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((0,1,1,1,-2), L_1)$ и $M_2((-2,-2,2,0,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (3,-2,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,2,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 37.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,3,4,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,3,3,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,5,3,5,5),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,3,3,3,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,4,3)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 5x + 2,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 4x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 4x^2 + 2x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 & -2\\ 4 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 5 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-2,2,0,0,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,-1,5,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,0,-2,2,0)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (2,-1,4,5,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,-2,4,2,1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (0,5,3,0,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((0,-2,4,2,4), L_1)$ и $M_2((-2,4,3,5,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,2,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,-1,2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0\\ 5 & 5 & -2 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 38.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,3,4,3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,3,5,3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,5,5,4,3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,3,5,3,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (5,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,3)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 5x^2 + 5,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 4x + 4,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 3x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2\\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,5,-2,1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,5,-1,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,3,4,4,0)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,2,3,-1,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,1,2,4,1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,0,1,1,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,1,3,4,4), L_1)$ и $M_2((1,-1,1,-2,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,5,-2,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,-2,4)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0\\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?