Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Якутский государственный университет имени М.К. Аммосова»
Институт математики информатики
Кафедра алгебры и геометрии

Учебно-методический комплекс

дисциплины

«Алгебра»

для студентов очной формы обучения

по специальности 050202 «ИНОФРМАТИКА»

Якутск 2009 г.

Составитель: Бочарова И.Н., к.п.н, доцент,

Учебно-методический комплекс утвержден на заседании кафедры алгебры и геометрии
“ 24 “ февраля 2009 г. протокол №178

Зав.кафедрой алгебры и геометрии,
к.ф-м.н., профессор

Никитина Е.С.

Учебно-методический комплекс утвержден на заседании научно-методического совета института математики и информатики
“ “ ___________2009 г. протокол № _____

Председатель НМК ИМИ,
д.п.н.,профессор Голиков А.И.

Учебно-методический комплекс утвержден на заседании научно – методического Совета ЯГУ
“ “ __________ 2009 г. протокол № _____

Председатель НМС ЯГУ,
к.и.н.,доцент : Stручкова Н.А.

СОДЕРЖАНИЕ

Выписка из учебного плана специальности 050202 Информатика с дополнительной специальностью математика

ВУЗ Якутский государственный университет
Институт Институт математики и информатики
Кафедра алгебры и геометрии
Форма обучения очная
Курс I, II
Семестр I – III семестр

Часов по ГОСу (из РУП) **345** Часов по рабочему учебному плану: **345**
Часов по прим. программе Часов по рабочей программе: **345**
Часов на самостоятельную работу по ППД:
Часов на самостоятельную работу по РУП: 181 (52%)
Часов на самостоятельную работу по РПД: 181 (52%)

Коэффициент уникальности дисциплины: **8,0**

Виды контроля в семестрах (на курсах)	Экзамены	Зачеты	Курсовые проекты	Курсовые работы
	1,3	2		

Распределение часов дисциплины по семестрам

Вид занятий	**№ семестров, число учебных недель в семестрах**																					
	1	*14*	**2**	*22*	**3**	*14*	**4**	*22*	**5**		**6**		**7**		**8**		**9**		**10**		**Итого**	
	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД
Лекции	28	28	22	22	14	14															64	64
Лабораторные																						
Практические	28	28	44	44	28	28															100	100
КСР																						
Ауд. занятия	56	56	66	66	42	42															164	164
Сам. работа	61	61	60	60	60	60															181	181
Итого	117	117	126	126	102	102															345	345

1. **Требования к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы подготовки учителя информатики и математики по специальности 050202-Информатика с доп. Специальностью Математика**

Индекс	Наименование дисциплины и ее основные разделы	Всего часов
СД Ф.6	Алгебры, алгебраические системы.	**345**
	Понятия группы, кольца, поля.	
	Расширения полей, алгебраические и конечные расширения, приложение к задачам на построение с помощью циркуля и линейки.	
	Поле комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.	
	Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теория делимости.	
	Неприводимые над полем действительных чисел многочлены.	
	Матрицы и определители.	
	Системы линейных уравнений.	
	Линейные (векторные) пространства.	
	Евклидовы пространства.	
	Линейные преобразования и их матрицы.	
	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.	
	Подгруппы.	
	Смежные классы по подгруппе, фактор-группы.	
	Кольца главных идеалов.	
	Многочлены от нескольких переменных, симметрические многочлены.	

2. **ТРЕБОВАНИЯ СТАНДАРТА К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКА по специальности 050202 Информатика с доп. специальностью Математика**

Специалист должен отвечать следующим требованиям:

1.1. Уметь осуществлять процесс обучения учащихся средней школы с ориентацией на задачи обучения, воспитания и развития личности школьников и с учетом специфики преподаваемого предмета.

1.2. Уметь стимулировать развитие внеурочной деятельности учащихся с учетом психологических требований, предъявляемых к образованию и обучению.

1.3. Уметь анализировать собственную деятельность, с целью ее совершенствования и повышения квалификации.

1.4. Уметь выполнять методическую работу в составе школьных методических объединений.

1.5. Уметь выполнять работу классного руководителя, поддерживать контакт с родителями.

1.6. Владеть основными понятиями математики.

1.7. Уметь использовать математический аппарат при изучении и количественном описании реальных процессов и явлений.

1.8. Иметь целостное представление о математике как о науке, ее месте в современном мире и в системе наук.

3. ПРИНЦИПЫ И ЦЕЛИ.

3.1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ КУРСА:

1. Данный курс разработан в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 050202 Информатика с доп. Специальностью Математика квалификация – учитель информатики и математики.
2. Основной целью курса является освоение основных алгебраических понятий и задач на уровне высшей школы и подготовка к изучению других математических дисциплин (аналитическая и дифференциальная геометрия, топология, математический анализ и т.д.), воспитание у студентов культуры мышления и доказательства математических утверждений.
3. Материал курса в значительной мере представлен в школьной математике, поэтому предполагает предметную подготовку будущих учителей, как в смысле навыков, так и в смысле необходимого объема знаний. На его основе выпускники должна получить достаточную математическую культура для понимания основного школьного курса математики и факультативных курсов.
4. Программа предполагает индуктивное построение курса.
5. Основными формами проведения занятий по алгебре являются лекции, лабораторные занятия и самостоятельная работа. Курс имеет практическую направленность: лабораторные занятия - 100 ч., самостоятельная работа - 181 ч.
6. Текущий контроль в течение семестра осуществляется в виде контрольных работ, диктантов и коллоквиумов. Итоговый контроль предполагает зачеты в 2 семестрах и экзамены в 1 и 3 семестрах.
7. В рамках самостоятельной работы студенты выполняют домашние (индивидуальные) задания, прорабатывают теоретический материал, работают с конспектом лекций и над учебным материалом, готовят реферат.

3.2. ЦЕЛИ КУРСА

№ Цели	**Содержание цели**
	Студент должен **иметь представление**
1.	О предмете курса и истории развития алгебры.
2.	Об основных разделах алгебры и линейной алгебры
3.	О методах алгебры и линейной алгебры в изучении других математических дисциплин
	Студент должен **знать**
4.	Все основные определения и понятия по теории систем линейных уравнений, многочленов, групп, теории квадратичных форм, линейных пространств, линейных преобразований, по кольцам, алгебрам и алгебраическим системам.
5.	Основные направления исследований и основные методы, используемые в алгебре.
6.	О взаимосвязях между основными разделами алгебры.
	Студент должен **уметь**
7.	Решать основные виды задач: a)извлечения корней из комплексного числа; b)деление многочленов с остатком; c)нахождение НОД многочленов; d)нахождение корней многочлена; e)вычисление определителя; f)решение систем линейных уравнений; g)нахождение базиса системы векторов; h)нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования; i)приведение квадратичных форм к главным осям.
8.	Доказывать наиболее важные математические утверждения в курсе алгебры.
9.	Применять материал курса для работы в школе: факультативные занятия, спецкурсы

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА.

Разделы дисциплины и виды занятий

Код учебного занятия	Номер учебной недели	Вид и номер занятия	Объем в часах	Тема занятия
СЕМЕСТР 1				
(14 учебных недель. В неделю: 2 часа лекций; 2 часа практики)				
Модуль 1 (14 неделя – контрольная точка)				
Раздел 1.1. Матрицы и определители. (50)				
1.01.01.01	1	Лекц.1	2	1.Предмет курса. Краткий исторический обзор развития алгебры.
1.01.01.02	2	Лекц.2	2	2.Перестановки и подстановки: Теорема о числе различных перестановок из n символов. Понятия транспозиции в перестановках, инверсии, четных и нечетных перестановок. Теорема о транспозиции в перестановке. Теорема о расположении всех n! Перестановок из n символов.
1.01.01.03	1	Практ.1	2	2. Перестановки и подстановки: Понятия транспозиции в перестановках, инверсии, четных и нечетных перестановок. Определение четности перестановок.
1.01.01.04	3	Лекц.3	2	3.Понятия подстановки, четной (нечетной) подстановки, тождественной. Умножение подстановок, свойства. Понятия транспозиции, циклической подстановки. Теорема о разложении подстановки в произведение транспозиций. Утверждения о циклических подстановках. Теорема о декременте подстановки.
1.01.01.05	2	Практ.2	2	3. Понятия подстановки, четной (нечетной) подстановки, тождественной. Умножение подстановок. Понятия транспозиции, циклической подстановки. Определение четности подстановки тремя способами. Решение уравнений в подстановках. Возведение в степень.
1.01.01.06		Сам. раб.	7	2-3. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Перестановки и подстановки».
1.01.01.07	3	Практ.3	2	2-3. Диктант и к/р по теме «Перестановки и подстановки».
1.01.01.08	4-5	Лекц.4-5	4	4. Квадратные матрицы и их определители. Основные свойства определителей.
1.01.01.09	4	Практ.4	2	4. Квадратные матрицы и их определители. Основные свойства определителей. Минор, дополнительный минор.
1.01.01.10	6-7	Лекц.6-7	4	5. Минор, дополнительный минор. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение. Разложение определителя по строке или столбцу. Теорема Лапласа.
1.01.01.11	5	Практ.5	2	5.Методы вычисления определителей. Вычисление определителей: разложением по строке или столбцу, с помощью теоремы Лапласа.
1.01.01.12	8-9	Лекц.8-9	4	6.Методы вычисления определителей. Метод рекуррентных соотношений (два случая). Правило Крамера.
1.01.01.13	6	Практ.6	2	6. Методы вычисления определителей. Метод рекуррентных соотношений (два случая). Правило Крамера.
1.01.01.14		Сам. раб.	11	4-6. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к

				диктанту и коллоквиуму по теме «Определители n-го порядка»
1.01.01.15	7	Практ.7	2	4-6. Диктант и к/р по теме «Определители n-го порядка».
Раздел 2.2. Матрицы и системы линейных уравнений. (28)				
1.01.02.01	10	Лекц.10	2	7. Матрицы и их элементарные преобразования. Понятие ступенчатой матрицы. Теорема о том, что любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью к.ч.п.с. Теорема о том, что если от матрицы А к матрице В можно перейти к.ч.э.п. строк, то и от В к А можно перейти к.ч.э.п. строк. Ранг матрицы. Теоремы о ранге матриц: Теорема о неизменности ранга матрицы при транспонировании, выполнении к.ч.э.п. строк (столбцов) Теорема о ранге ступенчатой матрицы.
1.01.02.02	8	Практ.8	2	7. Матрицы и их элементарные преобразования. Понятие ступенчатой матрицы. Приведение произвольной матрицы к ступенчатому виду с помощью к.ч.э.п. строк. Ранг матрицы (2 способа).
1.01.02.03	11	Лекц.11	2	8. Системы линейных уравнений. Понятие решения СЛУ. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные СЛУ. Эквивалентные системы уравнений. Теорема о том, что если от А можно перейти к В с помощью к.ч.э.п.с., то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны. Решение систем линейных уравнений ступенчатого вида (два случая). Метод Гаусса. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы. Теорема Кронекера-Капелли. Необходимое и достаточное условие, чтобы совместная система была определенной. Следствия. Основная теорема систем линейных уравнений.*.
1.01.02.04	9	Практ.9	2	8. Системы линейных уравнений. Понятие решения СЛУ. Решение систем линейных уравнений ступенчатого вида (два случая). Метод Гаусса. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы.
1.01.02.05	12-13	Лекц.12-13	4	9. Алгебра матриц: Матрицы и действия над ними. Свойства действий над матрицами. Элементарные матрицы. Связь элементарных преобразований с умножением на элементарные матрицы.* Диагональные матрицы, умножение произвольной матрицы на диагональную.*. Теорема о ранге произведения матриц. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Формула для нахождения обратной матрицы. Определитель произведения матриц.
1.01.02.06	10	Практ.10	2	9. Алгебра матриц: Матрицы и действия над ними. Свойства действий над матрицами. Элементарные матрицы. 2 способа нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений. Представление невырожденных матриц в виде произведения конечного числа элементарных матриц. 2 способа нахождения обратной матрицы.
1.01.02.07		Сам. раб.	12	7-9. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Матрицы и системы линейных уравнений»
1.01.02.08	11	Практ.11	2	7-9. Диктант и к/р по теме «Матрицы и системы линейных уравнений».
Раздел 3.3. Поле комплексных чисел и обобщение материала семестра. (39)				
1.01.03.01	14	Лекц.14	2	10. Поле комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Действия над комплексными

				числами в тригонометрическом виде. Извлечения корня квадратного их комплексного числа в алгебраическом виде. Возведение в степень и извлечение корня. Геометрическое представление комплексных чисел и операции над ними. Сопряженные и обратные числа, их изображение на комплексной плоскости. * Группа корней n-ой степени из единицы. Первообразные корни. Теоремы о первообразных корнях.
1.01.03.02	12	Практ.12	2	10. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами в тригонометрическом виде. Извлечения корня квадратного их комплексного числа в алгебраическом виде. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
1.01.03.03	13	Практ.13	2	11. Возведение в степень и извлечение корня. Решение уравнений над полем комплексных чисел. Нахождение сумм тригонометрических функций.
1.01.03.04		Сам.раб	7	10-11. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Комплексные числа»
1.01.03.05	14	Практ.14	2	10-11. Диктант и к/р по теме «Комплексные числа».
1.01.03.06		Сам. раб.	24	1-11. Обобщение материала семестра. Подготовка к экзамену.
СЕМЕСТР 2				
(22 учебных недель. В неделю: 2 часа лекций; 2 часа практики)				
Модуль 2 (22 неделя – контрольная точка)				
Раздел 1.1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем комплексных чисел. Теория делимости . (62)				
2.02.01.07	1	Лекц.1	2	1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем: Понятие многочлена (полинома) от одной переменной над полем. Операции над многочленами и их свойства. Алгоритм деления с остатком.
2.02.01.08	1-2	Практ.1-2	4	1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем: Понятие многочлена (полинома) от одной переменной над полем. Алгоритм деления с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Применение теоремы о НОД многочленов и ее следствия.
2.02.01.09	2	Лекц.2	2	2. Делители. Свойства делимости. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Теорема о НОД многочленов. Следствие. Свойства взаимно простых многочленов.*
2.02.01.10	3-5	Практ.3-5	6	2. Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Разложение многочлена в сумму степеней линейного двучлена. Отделение кратных корней, определение кратности корня. Разложение многочленов в произведение степеней линейных двучленов и многочленов второй степени с комплексными корнями. Формулы Виета.
2.02.01.11	3	Лекц.3	2	3. Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Теорема о разложении многочлена в сумму степеней линейного двучлена. Кратные корни. Теорема о понижении кратности корня.
2.02.01.12	6-9	Практ.6-9	8	3. Определение границ корней многочлена, нахождение рациональных корней целочисленных многочленов. Решение уравнений 3 и 4 степени в поле комплексных чисел. Формула Кардано, метод Феррари. Интерполяция: интерполяционный многочлен Лагранжа, метод интерполяции Ньютона. Границы корней многочлена.

				Теорема Штурма. Построение ряда Штурма. Приближенное вычисление корней многочлена.
2.02.01.13	4	Лекц.4	2	4. Основная теорема алгебры комплексных чисел.* Следствия для многочленов с комплексными, действительными коэффициентами. Формулы Виета.
2.02.01.14	5	Лекц.5	2	5. Рациональные корни целочисленных многочленов. Теоремы.
2.02.01.15	6	Лекц.6	2	6. Алгебраическое решение уравнений 3 и 4 степени. Формула Кардано, метод Феррари.* Интерполяция: интерполяционный многочлен Лагранжа, метод интерполяции Ньютона. Границы корней многочлена. Теорема Штурма. Построение ряда Штурма. Приближенное вычисление корней многочлена.*
2.02.01.16	10-11	Практ.10-11	4	6. Разложение многочленов на неприводимые множители: Приводимость многочленов над полем рациональных чисел. Критерий Эйзенштейна. Рациональные дроби. Правильные рациональные дроби. Разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей.
2.02.01.17	7	Лекц.7	2	7. Разложение многочленов на неприводимые множители: Понятие приводимых и неприводимых многочленов над полем. Свойства неприводимых многочленов. Приводимость многочленов над полем рациональных чисел. Критерий Эйзенштейна.
2.02.01.18	8	Лекц.8	2	7. Рациональные дроби. Правильные рациональные дроби. Теорема о разложении рациональной дроби в сумму многочлена и правильной дроби. Простейшие дроби. Теорема о существовании и единственности разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей(основная теорема теории рациональных дробей).
2.02.01.19		Сам.раб	22	1-7. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Кольцо многочленов от одной переменной над полем комплексных чисел. Теория делимости»
2.02.01.20	12	Практ.12	2	1-7. Диктант и к/р по теме «Кольцо многочленов от одной переменной над полем комплексных чисел. Теория делимости».
Раздел 2.2. Кольцо многочленов от нескольких переменных над полем Р. Симметрические многочлены. (12)				
2.02.02.01	9	Лекц.9	2	8. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Основная теорема теории симметрических многочленов.
2.02.02.02	13-14	Практ.13-14	4	8. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Разложение многочленов симметрических многочленов в многочлен от элементарных симметрических многочленов.
2.02.02.03		Сам.раб	4	8. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Симметрические многочлены»
2.02.02.04	15	Практ.15	2	8. Диктант и к/р по теме «Симметрические многочлены».
Раздел 3.3. Квадратичные формы и обобщение материала семестра (22)				
2.02.03.01	10-11	Лекц.10-11	4	9. Квадратичные формы. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Основная теорема о квадратичных формах. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

2.02.03.02	16-18	Практ.16-18	6	9. Квадратичные формы. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Основная теорема о квадратичных формах. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
2.02.03.03		Сам.раб	10	9. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Квадратичные формы»
2.02.03.04	19	Практ.19	2	9. Диктант и к/р по теме «Квадратичные формы».
Раздел 4.4. Линейные (векторные) пространства и обобщение материала семестра(30)				
2.02.04.01	20-21	Практ.20-21	4	10. Определение n – мерного векторного пространства. Определения линейной зависимости векторов. Максимальная линейно независимая система векторов и ее свойства. Эквивалентные системы векторов. Нахождение максимальной линейной независимой подсистемы заданной системы векторов. Пространство решений систем линейных однородных уравнений: Свойства решений СЛОУ. Фундаментальная система решений. Базис пространства решений СЛОУ. Связь решений неоднородной и приведенной однородной систем линейных уравнений. Решение СЛОУ
2.02.04.02	22	Практ.22	2	10. Сводная контрольная работа по материалам 1 и 2 семестра.
2.02.04.03		Сам. раб	24	1-10. Обобщение материала семестра. Подготовка к зачету.
СЕМЕСТР 3				
(14 учебных недель. В неделю: 2 часа лекций; 2 часа практики)				
Модуль 3 (14 неделя – контрольная точка)				
Раздел 1.1. Линейные (векторные) пространства(20)				
3.03.01.01	1	Лекц.1	2	1. Векторные (линейные) пространства. Аксиоматическое определение линейного пространства, базис и размерность пространства. Теорема о единственности разложения произвольного вектора линейного пространства в линейную комбинацию базисных векторов. Изоморфизм линейных пространств. Основная терема об изоморфизме линейных пространств. Невырожденность матрицы перехода от одного базиса к другому. Связь координат одного и того же вектора в разных базах.
3.03.01.02	1	Практ.1	2	1. Аксиоматическое определение линейного пространства, базис и размерность пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Невырожденность матрицы перехода от одного базиса к другому. Связь координат одного и того же вектора в разных базах.
3.03.01.03	2	Лекц.2	2	2. Подпространства линейных пространств. Линейная оболочка множества векторов. Пересечение, сумма, прямая сумма подпространств. Теорема о том, что пересечение и сумма линейных подпространств есть подпространство. Теорема о размерности суммы двух подпространств. Теоремы о прямых суммах подпространств. Линейное многообразие.
3.03.01.04	2	Практ.2	2	2. Подпространства линейных пространств. Линейная оболочка множества векторов. Базис и размерность пересечение, сумма, прямая сумма подпространств. Линейное многообразие. Вектор сдвига и направляющее подпространство линейного многообразия, заданного СЛНУ.
3.03.01.05		Сам.раб	10	1-2. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Линейные (векторные) пространства»

3.03.01.06	3	Практ.3	2	1-2. Диктант и к/р по теме «Линейные (векторные) пространства».
Раздел 2.2. Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы (28)				
3.03.02.01	3-4	Лекц.3-4	4	3. Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы. Теорема о существовании и единственности линейного преобразования, переводящего линейно независимые векторы в произвольные. Координаты образа вектора. Связь между матрицами одного и того же линейного преобразования в различных базисах. Действия над линейными преобразованиями. Образы и прообразы линейных пространств относительно линейного преобразования. Теорема о том, что образы и прообразы линейных подпространств являются линейными пространствами. Область значений и ядро линейного преобразования. Теорема о том, что ядро и область значений являются подространствами. Теорема о том, что ядро линейного преобразования есть пространство решений СЛОУ. Ранг и дефект линейного преобразования. Теоремы о размерностях ядра и области значений. Теорема о ранге произвольного линейного преобразования. Неособенные линейные преобразования. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное преобразование было неособенным.* Инвариантные подпространства. Теорема о том, что ядро и область значений линейного преобразования являются инвариантными подпространствами относительно любого линейного преобразования. Теорема о прямой сумме инвариантных подпространств.*
3.03.02.02	4	Практ.4	2	3. Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы. Координаты образа вектора. Связь между матрицами одного и того же линейного преобразования в различных базисах. Действия над линейными преобразованиями. Область значений и ядро линейного преобразования. Ранг и дефект линейного преобразования
3.03.02.03	5	Лекц.5	2	4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов (преобразований) и их свойства. Теорема о том, что собственными значениями линейного преобразования служат действительные характеристические корни линейного преобразования, и только они. Спектр. Теорема о матрице линейного преобразования в базе, состоящей из собственных векторов. Простой спектр. Диагональный вид матрицы линейного преобразования с простым спектром.
3.03.02.04	5	Практ.5	2	4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов (преобразований) и их свойства. Отыскание собственных значений линейного преобразования через характеристический многочлен. Диагональный вид матрицы линейного преобразования с простым спектром. Ортогональные и симметрические преобразования: Ортогональные матрицы. Ортогональные преобразования евклидовых пространств. Симметрические преобразования и их свойства.
3.03.02.05	6	Лекц.6	2	5. Ортогональные и симметрические преобразования: Ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы матрица была ортогональной. Теорема о матрице перехода от ортонормированной базы евклидова пространства к

				любой другой его ортонормированной базе. Ортогональные преобразования евклидовых пространств. Утверждения о них. Свойства ортогональных преобразований. Симметрические преобразования и их свойства. Утверждения о симметрических преобразованиях. Теорема о характеристических корнях симметрического преобразования. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное преобразование евклидова пространства было симметрическим. Теорема о собственных векторах симметрического преобразования, относящихся к различным собственным значениям.
3.03.02.06	6	Практ.6	2	5. Приведение квадратичных форм к главным осям. Отыскание вырожденного линейного преобразования, одновременно приводящего действительную положительно определенную квадратичную форму g к нормальному виду и произвольную действительную форму f – к каноническому.
3.03.02.07	7	Лекц.7	2	6. Приведение квадратичных форм к главным осям. Теорема о существовании ортогональной матрицы, приводящей симметрическую матрицу к диагональному виду. Теорема о коэффициентах канонического вида квадратичной формы, к которому она приводится с помощью ортогонального преобразования. Пары форм. Теорема о существовании невырожденного линейного преобразования, одновременно приводящего действительную положительно определенную квадратичную форму g к нормальному виду и произвольную действительную форму f – к каноническому.
3.03.02.08		Сам.раб	10	3-6. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы»
3.03.02.09	7	Практ.7	2	3-6. Диктант и к/р по теме «Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы».
Раздел 3.3. Евклидовы пространства.(16)				
3.03.03.01	8	Практ.8	2	7. Евклидовы пространства. Ортонормированная система векторов. Процесс ортонормирования. Длина вектора и угол между векторами. Определитель Грамма. Необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы Грамма.
3.03.03.02	9	Практ.9	2	8. Ортогональное дополнение к подпространству. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства.
3.03.03.03		Сам.раб	10	7-8. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Евклидовы пространства»
3.03.03.04	10	Практ.10	2	7-8. Диктант и к/р по теме «Евклидовы пространства».
Раздел 4.4. Элементы общей алгебры и обобщение материала семестра. (38)				
3.03.04.01	11	Практ.11	2	9. Понятие алгебраической операции (бинарной, n-арной). Универсальная алгебра. Группоиды, полугруппы, квазигруппы, лупы. Примеры универсальных алгебр.
3.03.04.02	12-13	Практ.12-13	4	10. Группы и их подгруппы. Изоморфизм групп. Построение группы подстановок изоморфной данной. Смежные классы и их свойства. Теорема Лагранжа и ее следствия. Разложение группы на смежные классы по подгруппе, нормальные делители группы, фактор –

				группы.
3.03.04.03		Сам.раб	8	9-10. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Универсальные алгебры»
3.03.04.04	14	Практ.14	2	9-10. Диктант и к/р по теме «Универсальные алгебры».
3.03.04.05		Сам. раб	22	1-10. Обобщение материала семестра. Подготовка к экзамену.

5 Тематика лабораторных и письменных работ	
5.1 Лабораторные работы	
№	**Наименование (тема) лабораторных работы**
5.1.1	Не предусмотрено
5.2 Индивидуальные задания	
№	**Перечень рекомендуемых тем**
5.2.1	Решение систем линейного уравнения (23 задачи, 20 часов) – Метод Гаусса решения систем лин. уравнения с единственным решением (13 задач, 6 часа) – Метод Гаусса решения систем лин. уравнения с бесконечным числом решений (8 задач, 6 часа) – Метод Гаусса при доказательстве несовместности систем лин. уравнения (2 задачи, 2 часа) – Метод Крамера решения систем линейного уравнения, различные случаи (3 задачи, 4 часа) – Метод решения систем линейного уравнения с помощью матриц (2 задачи, 2 часа)
5.2.2	Матрицы и системы линейных уравнений (15 задач, 20 часов) – Произведение матриц (6 задач, 2 часа) – Нахождение определителей матриц (12 задач, 14 часов) – Нахождение обратных матриц (6 задач, 4 часа)
5.2.3	Комплексные числа – Арифметические действия с комплексными числами (6 задач, 1 час) – Тригонометрическая форма комплексных чисел (6 задачи, 4 часа) – Комплексные корни многочленов (2 задачи, 1 час) – Геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций над ними (1 задача, 0,5 часа)
5.2.4	Многочлены – Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида (3 задачи, 1 час) – Схема Горнера, разложение многочлена по степеням (2 задачи, 1 час) – НОД многочленов (2 задачи, 2 часа) – Разложение многочленов на не приводимые множители. Отделение кратных множителей. Корни многочлена (2 задачи, 2 часа) – Связь корней многочлена с его коэффициентами. Теорема Виета (2 задачи, 2 часа) – Корни многочлена с действительными коэффициентами. Оценки корней. (2 задачи, 1 час) – Отыскание целых и рациональных корней многочлена (3 задачи, 2 часа) – Симметрические многочлены (4 задачи, 2 часа)
5.2.5	Векторные пространства – Базис. Размерность (5 задач, 3 часа) – Координаты вектора. Преобразование координат (1 задача, 2 часа) – *n*-мерные векторы. Линейная зависимость (3 задачи, 1 час) – суммы подпространств и линейные многообразия (3 задачи, 6 часов)

5.2.6	Евклидовы пространства – Скалярное произведение (10 задач, 3 часа) – Длина и угол (10 задач, 2 часа) – Проекция вектора (3 задачи, 3 час) – Ортогонализация Грамма-Шмидта (2 задачи, 6 часов)
5.2.7	Линейные преобразования и матрицы – Ядро линейного преобразования (2 задачи, 4 часа) – Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (3 задачи, 4 часа) – Характеристический многочлен (3 задачи, 4 часа) – Жорданова форма матрицы (3 задачи, 4 часа)
5.2.8	Приведение квадратичной формы к каноническому виду – приведение к каноническому и нормальному виду (3 задачи, 4 часа)
5.2.9	Группы Изоморфизм групп
5.3 Упражнения для закрепления и самоконтроля из конспекта лекций	
№	
5.3.1	По каждой теме по 2-7 задач

5.4 Формы самоконтроля		
№	**Наименование (тема) лабораторных работы**	**Формы самоконтроля**
5.4.1	Лабораторные занятия	нет
5.4.2	Индивидуальные задания	проверка решений и ответов
5.4.5	Упражнения	нет

6. КОНТРОЛИРУЮЩИЙ МАТЕРИАЛ

Фонд материалов, контролирующих деятельность студента, содержит:
- тексты тематических контрольных работ;
- тексты контрольных работ по проверке остаточных знаний за первый, второй, третий семестры;
- вопросы диктантов;
- вопросы коллоквиумов по темам;
- темы рефератов;
- зачетные работы;
- экзаменационные материалы.

6.1.Тексты тематических контрольных работ

1 СЕМЕСТР

Контрольная работа по теме «Перестановки и подстановки»

Вариант 1.

1. В следующих перестановках определить число инверсий и указать общий признак тех чисел, для которых эта перестановка четная и тех, для которых она нечетная:

a) 1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 10, 7, 9, … , 5n-4, 5n-2, 5n, 5n-3, 5n-1;

b) 1, 6, 11, … , 5n-4, 3, 8, 13, … , 5n-2, 5, 10, 15, … , 5n, 2, 7, 12, … , 5n-3, 4, 9, 14, … , 5n-1.

2. Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций. Определить четность подстановки тремя способами:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 10 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots & 5n-4 & 5n-3 & 5n-2 & 5n-1 & 5n \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 9 & \dots & 5n-4 & 5n-2 & 5n & 5n-3 & 5n-1 \end{pmatrix}$;

3. Найти A^{100}, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Решить уравнения в подстановках: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$*X*(1, 2)(3, 4)(6, 5)=(1, 2, 3, 4, 5, 6);

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$*X=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить подстановки седьмой степени: (1, 2, 3)*(2, 3, 4)*(6, 7)*(1, 5).

Контрольная работа по теме «Определители»

Вариант 1

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x & \dots & n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Контрольная работа по теме "Системы линейных уравнений"

Вариант 1

1. Исследовать систему, заданную расширенной матрицей.
   Найти общее решение в зависимости от параметра *k*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 1 & k & 0 \\ 1 & k & k & 2 \\ 2 & 3 & k & 3 \end{array}\right)$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Решить систему (найти общее решение и фундаментальную систему решений):

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Контрольная работа по теме "Матрицы"

Вариант 1

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Для матрицы A найти такую матрицу X, что XA=C, где C - некоторая ступенчатая матрица, эквивалентная матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Для данной матрицы A найти обратную матрицу двумя способами.
   Представить данную матрицу в виде произведения элементарных матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 1

1. Решить уравнения в поле комплексных чисел: x^4+i=0.
2. Найти все значения корня, не переходя к тригонометрической форме: $\sqrt{20-21i}$.

3. Вычислить, используя правила действий над комплексными числами в тригонометрической форме: $\dfrac{(1+i)^{30}}{2(1-i)^{27}}$.
4. Выразить $f\left(\left(\left[\dfrac{30-k}{4}\right]+3\right)x\right)$ через $\sin x$ и $\cos x$, где $f(x)=\begin{cases}\sin x, & k=\overline{1,15}\\ \cos x, & k=\overline{16,30}\end{cases}$.

2 СЕМЕСТР

Контрольная работа по теме «Многочлены. Рациональные дроби»

Вариант 1.

1. Найти рациональные корни многочлена $2x^3-x^2+4x-2$.
2. Данную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей в поле рациональных чисел $\dfrac{2x+1}{x^3-x^2}$.
3. Найти НОД многочленов $f(x)=(x+1)^2(x-2), g(x)=(x+1)(x-2)^2, h(x)=x^2-x-2$.
4. Избавиться от кратных корней $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$.
5. Разложить многочлен x^4+5x^3-3x+2 по степеням $x-1$.

Контрольная работа по теме «Многочлены. Квадратичные формы»

Вариант 1

1. а) Найти невырожденные линейные преобразования, приводящие квадратичные формы f и g к нормальному виду.
   б) Определить есть ли среди форм f и g положительно определенные или распадающиеся.
   с) Найти, если это возможно невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму f в квадратичную форму g. Сделать проверку.
   $f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$,
   $g=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$
2. Найти рациональные корни многочлена $f(x)=2x^4-x^3-4x^2+10x-4$.
3. Найти сумму кубов и сумму квадратов корней многочлена $f(x)=2x^8+3x^6-9x^5+x^2-7$.

3 СЕМЕСТР

Контрольная работа по теме «Векторные пространства»

Вариант 1.

1. Найти базис и размерность суммы подпространств L_1 и L_2, а также размерность их пересечения. L_1 – линейная оболочка, натянутая на векторы (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 0, 2, 0), (1, 0, 2, -1); L_2 – пространство решений СЛОУ $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-4x_4=0\\ x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases}$.
2. Найти вектор сдвига, размерность и базу направляющего подпространства линейного многообразия, заданного системой линейных уравнений:
$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ x_3+x_4+3x_5=2\\ 3x_4+2x_5=2\end{cases}$$
3. Найти матрицу перехода от базиса a_1=(1, 0, 1), a_2=(0, 1, 1), a_3=(0, 1, -1) к базису b_1=(1, 2, 1), b_2=(0, 0, 1), b_3=(1, 1, 1). Найти координаты вектора x=(2, 1, 2) в обоих базисах.
4. Найти координаты многочлена $f(x)=2x^2-5x+3$ в базе x^2-x+1, $3x-5$, 4.
5. Определить, будет ли сумма двух линейных оболочек, натянутых на векторы a_1=(1, 0, 1, 0), a_2=(2, 0, -2, 0) и b_1=(1, 2, 2, -3), b_2=(1, 2, -2, -3) соответственно, прямой?

Контрольная работа по теме «Линейные преобразования и их матрицы»

Вариант 1

1. Найти ядро, область значений, ранг, дефект линейного преобразования пространства заданного в некотором базисе матрицей A.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу линейного преобразования $2\varphi\psi$ в базисе $b_1,\ b_2$, если преобразование φ в базисе $a_1,\ a_2$ имеет матрицу A_φ, а преобразование ψ в базисе $b_1,\ b_2$ имеет матрицу B_ψ.

$$\begin{matrix}a_1=(2,5) & b_1=(2,2)\\ a_2=(1,3) & b_2=(1,2)\end{matrix}\quad A_\varphi=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix},\ B_\psi=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

3. Найти размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия заданного следующей системой:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0\\ 4x_4+x_5=1\end{cases}$$

Контрольная работа по теме: «Евклидовы пространства»

Вариант 1.

1. Найти ортонормированный базис пространства решений системы:

$$\begin{cases}x_3+x_4+x_5=0\\ x_1-x_2+2x_5=0\end{cases}.$$

2. Найти ортогональное дополнение ядра линейного преобразования φ евклидова пространства, заданного матрицей: $\begin{pmatrix}2&2&2&2\\0&0&1&3\\1&2&0&0\\1&2&0&0\end{pmatrix}$.

3. Найти диагональную матрицу подобную матрице A: A=$\begin{pmatrix}0&0&9\\0&6&0\\9&0&80\end{pmatrix}$.

4. Пусть $[x_1, x_2, x_3]$ – строка координат вектора x в некотором ортонормированном базисе. Будет ли линейное преобразование φ евклидова пространства а) ортогональным, б) симметрическим.

$$[x\varphi]=[\frac{\sqrt{2}}{2}x_1,-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,0].$$

5. Привести квадратичную форму f к главным осям: $f=3x_1^2+8x_2^2+6x_2x_3$.

Контрольная работа «Группы. Фактор-группы»

Вариант 1.

1. Какие из указанных числовых множеств являются группами. Ответ обосновать. <A, · >, где A – одно из множеств N, Q, R.
2. Образуют ли группу относительно операции умножения множество матриц вида: $\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}$, где $a\in R$.
3. Образуют ли группу относительно операции сложения множество матриц вида: $\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$, где a, b $\in R$.
4. Ассоциативна ли операция * на множестве Z, если $x*y=x^2+y^2$.

5. Найти порядок элемента группы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$
6. Найти правые и левые классы смежности группы S_3 по подгруппе H=[(1, 2)].
7. Построить фактор-группу Z_k/Z_l, если k=6, l=18. И построить группу подстановок, изоморфную группе Z_k/Z_l.
8. Найти все подгруппы, аддитивной группы целых чисел, порожденной элементами a, b, c, если a=4, b=6, c=10.

6.2. Тесты по темам.

Тест по теме «Перестановки и подстановки»

Вариант 1

1. Сколько существует различных перестановок из пяти символов.
   Ответ: а) 5; б) 10; в) 35; г) 120; д) 135; е) 200; ж) 210.
2. В подстановке (15)(234) перейти от записи в циклах к записи двумя строками с натуральным расположением чисел 1, 2, 3, …, n в верхней строке и подсчитать число инверсий в нижней строке.
   Ответ: а) 0; б) -1; в) 2; г) 4; д) 7; е) 12; ж) 9; з) 15.
3. Найти наименьшее k, удовлетворяющее равенству A^k=E, где
   $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$
   Ответ: а) 5; б) 7; в) 9; г) 8; д) 3; е) 14; ж) 15.
4. Чему равен декремент подстановки A^{110}, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.
   Ответ: а) -1; б) 0; в) 5; г) 7; д) 4; е) -9; ж) 8; з) 3.
5. Найти декремент подстановки X, удовлетворяющей равенству AX=B, где
   $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
   Ответ: а) 3; б) 2; в) 5; г) 7; д) 1; е) 4; ж) 6.

Тест №3. Определители.

Вариант 1

1. Какое из указанных ниже чисел равно определителю матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
   Ответ: а) 10; б) -10; в) 2; г) -2; д) 4; е) –4; ж) 5; з) -5.
2. Какое из указанных ниже чисел равно определителю матрицы $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$, порядка n.

Ответ: а) n^n; б) n^{-n}; в) $(-1)^{C_n^2} \cdot n!$; г) $n!$; д) $\prod_{i=1}^{n}(-i)$.

3. При каких значениях i и j выражение $a_{12}a_{2i}a_{33}a_{4j}a_{54}$ входит в состав определителя пятого порядка со знаком «+».
   Ответ: а) i=1, j=5; б) i=5, j=1; в) i=5, j=4; г) i=1, j=3.

4. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{23} в матрице A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **Ответ:** а) 7; б) –7; в) –3; г) 3; д) 0.

5. Определитель D=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ третьего порядка равен 4. Чему равен определитель Q, полученный из определителя D путем прибавления к элементам второй строки всех остальных его строк?
Ответ: а) 8; б) 6; в) 4; г)12.

Тест по теме «Матрицы и системы линейных уравнений»

Вариант 1

1. Найти сумму элементов второй строки матрицы обратной к матрице А.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) -8; б) -7; в) -1; г) 2; д) 1; е) 13.

2. Найти численное значение выражения $x_1x_2 + x_3$, где (x_1, x_2, x_3) – решения системы линейных уравнений, заданных расширенной матрицей.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Ответ: а) 1/2; б) -3; в) 2; г) 0; д) 6; е) –3/2.

3. При каком значении α данная система, заданная расширенной матрицей, не будет совместной?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & \alpha & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Ответ: а) -1; б) 0; в) 1; г) 3; д) 5; е) 6.

4. Найти произведение матриц и сумму элементов второй строки полученной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) 0; б) 10; в) 17; г) 22; д) 30; е) 33; ж) 6.

5. При каком значении α ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ меньше трех?

Ответ: а) 2/3; б) 3/2; в) 2; г) 3; д) 4; е) 8.

Тест. Комплексные числа.

Вариант 1

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-6}$ и подсчитать их сумму.

Ответ: а) 3/2; б) $\sqrt[4]{3/2}$; в) 1/2; г) 0; д) –1; е) i; ж) $2\sqrt[4]{24}$.

2. Произвести действие над комплексными числами в алгебраической форме

$$\frac{(2i-1)(2-i)}{1+2i}.$$

Ответ: а) $3i$; б) $2-i$; в) $2+i$; г) $-2-i$; д) $2i$; е) $-2+i$.

3. Решить уравнение $z^2+9=0$.

Ответ: а) $\pm(2-i)$; б) $\pm 2i$; в) $\pm(2+i)$; г) $\pm(3-2i)$; д) $\pm 3i$.

4. Извлечь корень $\sqrt{-1}$.

Ответ: а) $\{\pm 1\}$; б) $\{\pm i\}$; в) $\{\pm 1, \pm i\}$; г) $\{1;\ 1/2 \pm i\sqrt{3/2}\}$.

5. Вычислить i^{160}.

Ответ: а) 0; б) 1; в) -1; г) $-i$; д) i; е) 160.

Сводный тест за второй семестр

Вариант 1

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-6}$ и подсчитать их сумму.

Ответ: а) 3/2; б) $\sqrt[4]{3/2}$; в) 1/2; г) 0; д) –1; е) i; ж) $2\sqrt[4]{24}$.

2. Произвести действие над комплексными числами в алгебраической форме $\frac{(2i-1)(2-i)}{1+2i}$.

Ответ: а) $3i$; б) $2-i$; в) $2+i$; г) $-2-i$; д) $2i$; е) $-2+i$.

3. Решить уравнение $z^2+9=0$. **Ответ:** а) $\pm(2-i)$; б) $\pm 2i$; в) $\pm(2+i)$; г) $\pm(3-2i)$; д) $\pm 3i$.

4. Извлечь корень $\sqrt{-1}$. **Ответ:** а) $\{\pm 1\}$; б) $\{\pm i\}$; в) $\{\pm 1, \pm i\}$; г) $\{1;\ 1/2 \pm i\sqrt{3/2}\}$.

5. Вычислить i^{160}. **Ответ:** а) 0; б) 1; в) -1; г) $-i$; д) i; е) 160.

6. Чему равен показатель кратности корня –2 для многочлена $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

Ответ: а) 0; б) 2; в) 1; г) 4; д) 3; е) -1.

7. Найти многочлен d(x)=НОД(f(x), g(x)) (старший коэффициент d(x) должен быть равен 1) и значение d(x) при x=3, где $f(x) = (x^2+4)(x^2+1)(x^3-1),\ g(x) = (x^2-4)(x^2-1)(x^3+1)$.

Ответ: а) 1; б) 0; в) 3; г) 2; д) 4; е) 5, ж)7.

8. Найти рациональные корни многочлена $f(x) = 2x^3 + x^2 + x$ и в ответе записать сумму квадратов корней, сложенную с единицей.

Ответ: а) 2; б) 4; в) 3; г) 1; д) 0; е) 5.

9. Какие из многочленов $f_1 = 2x^3 + x^2 + x - 2$, $f_2 = x^5 - 2x^3 - 4x - 6$, $f_3 = x^6 - 4x^3 + 4$, $f_4 = x^4 - 81$ неприводимы в поле рациональных чисел?

Ответ: а) f_1, f_2, f_3; б) f_2, f_4; в) f_1, f_3; г) f_1, f_2; д) f_2, f_3.

10. Какие из данных рациональных дробей $A_1 = \frac{1}{x^2-1}$, $A_2 = \frac{3}{x^3-17}$, $A_3 = \frac{4x-1}{x^2+x+4}$, $A_4 = \frac{5x+1}{x^4}$ являются простейшими в поле действительных чисел?

Ответ: а) A_1, A_2, A_3; б) A_1, A_2; в) A_1, A_3, A_4; г) A_3; д) A_3, A_4.

11. Найти сумму кубов корней многочлена $f(x) = 2x^3 + x^2 + x$.

Ответ: а) 2; б) 5/8; в) -7/8; г) - 4; д) -2; е) 5/4.

12. Какая из заданных матриц является матрицей квадратичной формы $f = x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_3^2$?

Ответ: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4.

13. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Какие из квадратичных форм $f_1 = x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2$, $f_2 = -x_1^2 + x_2^2 + 8x_3^2$, $f_3 = x_1^2 + x_3^2$, $f_4 = 4x_1^2 - x_2^2$ эквивалентны? **Ответ:** а) f_1, f_3; б) f_2, f_3; в) f_3, f_4; г) f_2, f_4; д) f_1, f_2; е) f_1, f_3, f_4.

15. Какие из квадратичных форм $f_1 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$, $f_2 = x_1^2 + 2x_2^2$, $f_3 = 4x_1^2 - x_2x_3$, $f_4 = 4x_1^2 - x_2^2$ являются положительно определенными?

16. **Ответ:** а) f_1, f_2; б) f_1, f_3; в) f_3, f_4; г) f_1; д) f_2.

Сводный тест за III семестр

Вариант 1

Даны векторы $a_1 = (1,2,1,0,0), a_2 = (0,1,1,0,0), a_3 = (0,0,1,1,1), b_1 = (1,0,1,0,1), b_2 = (0,1,0,1,0)$.

Задание 1. Найти размерность пространства натянутого на эти векторы.

Ответ:а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 2. Найти размерность пересечения пространств L_1 и L_2 натянутых на системы векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 соответственно.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 3. При каком значении параметра p пространство решений однородной системы уравнений, заданной основной матрицей $\begin{pmatrix} p & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет наивысшую размерность?

Ответ: а) -8; б) $-\frac{3}{2}$; в) -1; г) $-\frac{7}{8}$; д) 1; е) 2.

Задание 4. Найти размерность ортогонального дополнения пространства решений данной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 5. Найти сумму элементов первой строки матрицы преобразования, переводящего векторы $a_1 = (1,2), a_2 = (2,3)$ в векторы $b_1 = (1,2), b_2 = (0,3)$ соответственно.

Ответ: а) -12; б) -8; в) -3; г) 0; д) 3; е) 15.

Задание 6. Определить размерность ядра линейного преобразования, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 7. Найти координаты вектора $x = (3,1)$ в базисе $e_1 = (1,1), e_2 = (-1,1)$.

Ответ: а) (2,-1); б) (2,-3); в) (1,1); г) (1,-2); д) (5,1); е) (2,3).

Задание 8. Выяснить, какие из следующих преобразований являются линейными

$$[x\varphi_1] = [x_1, -2x_2, 3x_3], [x\varphi_2] = [x_1^2, (x_2 + x_3)^2, -x_3], [x\varphi_3] = [x_1 + 1, x_2, x_3].$$

Ответ:а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Какие из линейных преобразований

$[x\varphi_1]=\left[\frac{x_1}{\sqrt{2}}-\frac{x_2}{\sqrt{2}},\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}},x_3\right],[x\varphi_2]=[x_1-x_2,x_1+x_2,x_3],$

$[x\varphi_1]=\left[\frac{x_1}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}},\frac{x_1}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}}-\frac{x_2}{\sqrt{3}},x_3\right],$

являются:

Задание 9. Ортогональными

Ответ:а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Задание 10. Симметрическими

Ответ:а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Задание 11. С помощью каких из формул

$$F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=5x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_2,\ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1^2+y_1^2+x_2y_2,$$
$$F_3(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2$$

в двумерном действительном евклидовом пространстве можно задать скалярное произведение

Ответ:а) ни одной; б) F_1; в) F_2; г) F_3; д) F_1 и F_2; е) F_1 и F_3.

Задание 12. Перейти от базиса $a_1=(2,1),a_2=(1,1)$ к ортогональному базису b_1,b_2, приняв $b_1=a_1,b_2=\alpha b_1+a_2$. В ответе указать значение α.

Ответ:а) $-\frac{7}{5}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{5}$; г) $\frac{3}{5}$; д) $\frac{1}{5}$; е) $\frac{1}{2}$.

Линейное преобразование задано матрицей $\begin{pmatrix}3&2&1\\0&2&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

Задание 13. Определить собственное значение преобразования, которому соответствует собственный вектор (0,2,0).

Ответ:а) -2; б) 0; в) 1; г) 2; д) 3; е) 4.

Задание 14. Найти сумму собственных значений данного преобразования.

Ответ:а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7; е) 9.

Задание 15. Привести квадратичную форму $5x_1^2-6x_1x_2-5x_2^2$ к главным осям и найти сумму коэффициентов найденного канонического вида.

Ответ:а) -5; б) 0; в) 3; г) 6; д) 7; е) 9.

Тексты контрольных работ по проверке остаточных знаний

Тема: Контрольная работа по остаточным знаниям за II семестр.

Вариант 1.

1. Определить четность подстановки тремя способами $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&1&2\end{pmatrix}$.
2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}-1&0&1&-1\\0&-1&0&1\\1&1&1&1\\-1&-1&1&1\end{vmatrix}$.
3. Установить, что система имеет единственное решение. Решить систему двумя способами: с помощью правила Крамера и методом Гаусса: $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=6\\x_1+x_3=1\\x_2+x_3=2\end{cases}$

4. Решить систему (найти общее решение и фундаментальную систему решений): $\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$.
5. Решить матричное уравнение XA=B: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Доказать, что следующая система векторов линейно зависима (-1, 2, -1, 1, 0), (2, 1, 1, 2, 0), (1, 0, 0, 0, -1), (0, 7, -2, 5, -1). Найти коэффициенты нетривиальной комбинации данных векторов равной 0.

Тема: Контрольная работа по остаточным знаниям за III семестр.

1. Найти координаты вектора x в базе b_1=(1,2,3), b_2=(1,0,1), b_3=(0,2,3), если в базе e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1) вектор x имеет координаты (2,2,3).
2. Найти базу ортогонального дополнения ядра и базу области значений линейного преобразования евклидова пространства, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти ортонормированный базис пространства решений системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.
4. Найти матрицу преобразования $\varphi\psi$ в базе b, b_2, если преобразование φ в базе a_1, a_2 имеет матрицу A_φ, а преобразование ψ в базе b_1, b_2 имеет матрицу B_ψ. a_1=(1,1), a_2=(1,0), b_1=(2,1), b_2=(3,2), $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Найти, если она существует, диагональную матрицу B, к которой приводится данная матрица A с помощью ортогонального преобразования. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
6. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x=(2,2,1) относительно ядра линейного преобразования евклидова пространства, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6.3. Вопросы диктантов

Тема: Перестановки и подстановки.

1. Что такое перестановка из n символов?
2. Теорема о числе различных перестановок из n символов.
3. Сколько существует различных перестановок из семи символов?
4. Что такое инверсия?
5. Что такое транспозиция (если речь идет о перестановках)?
6. Сколько существует четных (нечетных) перестановок из девяти символов?
7. Теорема о расположении всех перестановок из n символов.
8. Что такое подстановка n-й степени?
9. Сколько существует различных подстановок пятой степени?
10. Сколько существует четных (нечетных) подстановок шестой степени?
11. Что такое транспозиция (если речь идет о подстановках)?
12. Что мы называем умножением подстановок?
13. Теорема о произведении k транспозиций.

14. Как можно разложить в произведение транспозиций цикл длины k?
15. Что такое декремент?
16. Какова зависимость четности подстановки от декремента?
17. Что такое подстановка, обратная данной?
18. Удовлетворяет ли умножение подстановок законам коммутативности, ассоциативности?

Тема: Определители.

1. Что называется определителем матрицы n-го порядка?
2. Какие существуют правила вычисления определителей n-го порядка?
3. Свойства определителя, когда он равен нулю.
4. Другие свойства определителя.
5. Что называется алгебраическим дополнением минора r–порядка?
6. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
7. Теорема о разложении определителя по i–строке.
8. Теорема Лапласа. Следствие.
9. Определитель Вандермонда.
10. Метод рекуррентных соотношений: а) $\alpha=\beta$; б) $\alpha\neq\beta$;
11. При каком значении i и j произведение:
    1) $a_{13}a_{2i}a_{3j}a_{42}a_{55}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "+";
    2) $a_{13}a_{2i}a_{31}a_{4j}a_{52}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "–";
    3) $a_{12}a_{2i}a_{31}a_{43}a_{5j}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "+";
    4) $a_{14}a_{25}a_{3i}a_{4j}a_{53}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "–".
12. С каким знаком входит побочная диагональ в определитель:
    1) 102 порядка; 2) 97 порядка; 3) 202 порядка; 4) 192 порядка?
13. Разложить определитель:

$$1)\ \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ по 3 столбцу;} \quad 2)\ \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ по 3 строке.}$$

14. Найти алгебраическое дополнение минора, лежащего:
    1) в 2 и 4 строке, в 1 и 3 столбце; 2) в 1 и 3 строке, 2 и 4 столбце;
    в определителе

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тема: Матрицы и системы линейных уравнений.

1. Что называется матрицей, порядком матрицы?
2. Какое различие между матрицей и определителем?
3. Какие преобразования называются элементарными преобразованиями матрицы?
4. Какая матрица называется ступенчатой?
5. Теорема о том, что любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью конечного числа элементарных преобразований (к.ч.э.п.) строк.
6. Действия над матрицами. Ассоциативность умножения матриц.
7. Что называется рангом матрицы?
8. Способы нахождения ранга матрицы.
9. Теорема о неизменности ранга матрицы при выполнении к.ч.э.п.
10. Теорема о ранге ступенчатой матрицы.

11. Дать определения совместной, несовместной систем линейных уравнений (СЛУ).
12. Дать определения определенной и неопределенной СЛУ.
13. Эквивалентные системы уравнений.
14. Какие неизвестные мы можем объявить главными?
15. Теорема Кронекера – Капелли.
16. Необходимое и достаточное условие, чтобы совместная система была определенной.
17. Основная теорема теории СЛУ.
18. Какая матрица называется обратной к данной? Какая матрица обладает обратной матрицей?
19. Способы нахождения обратных матриц.
20. Правило Крамера.
21. Ранг основной матрицы равен 4, система сама несовместна. Чему равен ранг расширенной матрицы?
22. Пусть ранг основной матрицы совместной системы с 7 неизвестными равен 3. Что можем сказать о количестве главных и свободных неизвестных?

Тема: Комплексные числа
1. Что такое мнимая единица?
2. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
4. Формулы сложения и вычитания комплексных чисел в алгебраической форме.
5. Формулы умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.
6. Формула умножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Чему равны $|\alpha\beta|$, $\arg(\alpha\beta)$?
7. Формула деления комплексных чисел в тригонометрической форме. Чему равны $|\alpha/\beta|$, $\arg(\alpha/\beta)$?
8. Как задается число, сопряженное с комплексным числом α:
   а) в алгебраической форме;
   б) в тригонометрической форме,
   где $\alpha = a+bi$?
9. Формула Муавра.
10. Формула вычисления корней n-й степени из комплексного числа.

Тема: Многочлены. Рациональные дроби. Квадратичные формы.
1. Определение НОД многочленов.
2. Определение кратного корня многочлена.
3. Теорема Безу и её следствие.
4. Следствия из алгоритма Евклида.
5. Алгоритм деления с остатком.
6. Теоремы о рациональных корнях целочисленных многочленов.
7. Следствия из основной теоремы алгебры для многочленов с комплексными коэффициентами.
8. Основная теорема теории симметрических многочленов.
9. Формулы Виета.
10. Критерий Эйзенштейна
11. Определение простейшей рациональной дроби.
12. Определения нормального и канонического вида квадратичной формы.
13. Определение положительно определенной квадратичной формы. Теорема.
14. Критерий Сильвестра.
15. Основная теорема теории квадратичных форм.
16. Закон инерции.
17. Какие из данных многочленов приводимы в поле действительных чисел $f_1(x) = x^2 + 5x + 10$, $f_2(x) = 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 21x + 12$, $f_3(x) = 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2$?

18.Какие из данных рациональных дробей являются простейшими над полем рациональных чисел $A_1 = \dfrac{x}{(x+1)^2}, A_2 = \dfrac{x^2}{(x^2-4)^3}, A_3 = \dfrac{2x+1}{x^2-2}$?

Тема: Векторные пространства

1. Аксиоматическое определение линейных пространств.
2. Примеры линейных пространств.
3. Может ли линейное пространство состоять из одного вектора?
4. Может ли линейное пространство состоять из двух разных векторов?
5. Определение изоморфных линейных пространств.
6. Примеры изоморфных линейных пространств.
7. Определение подпространства линейного пространства.
8. Несобственные подпространства.
9. Определение линейной оболочки, натянутой на систему векторов.
10. Определение линейного многообразия.
11. Является ли линейное многообразие подпространством линейного пространства?
12. Определение пересечение линейных подпространств.
13. Определение суммы линейных подпространств.
14. Определение прямой суммы линейных подпространств.
15. Что такое базис пространства?
16. Что такое размерность пространства?
17. Связь координат одного и того же вектора в разных базах.
18. Что такое матрица перехода от одного базиса к другому?
19. Теорема о размерности суммы двух подпространств.

Тема: Линейные преобразования и их матрицы

1. Определение линейного преобразования линейных пространств.
2. Что такое матрица линейного преобразования?
3. Какой вид имеет матрица линейного преобразования, если векторы отображаются сами в себя?
4. Как изменится матрица линейного преобразования, если в базисе переставить местами какие-нибудь два вектора?
5. Сумма линейных преобразований.
6. Произведение линейных преобразований.
7. Формула нахождения координат образа вектора при линейном преобразовании.
8. Определение области значений и ядра линейного преобразования.
9. Что такое дефект и ранг линейного преобразования?
10. Понятия образов и прообразов линейных пространств относительно преобразования.
11. Невырожденные линейные преобразования.
12. Определение инвариантных подпространств.
13. Примеры инвариантных подпространств.
14. Определение собственных векторов и собственных значений линейного преобразования.
15. Что такое спектр линейного преобразования?
16. В каких случаях матрица линейного преобразования имеет диагональный вид?

Тема: Евклидовы пространства.

1. Аксиоматическое определение евклидова пространства.
2. Неравенство Коши - Буняковского.
3. Длина вектора и угол между векторами.
4. Нормирование вектора.
5. Определение ортогональной системы векторов.
6. Процесс ортогонализации.

7. Определение ортонормированной системы векторов.
8. Определение ортогонального дополнения.
9. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства.
10. Определение изоморфных евклидовых пространств.
11. Определение ортогональных матриц.
12. Свойства ортогональных матриц.
13. Определение ортогональных преобразований евклидовых пространств.
14. Свойства ортогональных преобразований.
15. Определение симметрических преобразований евклидовых пространств.
16. Свойства симметрических преобразований.

6.4. Экзаменационные вопросы

I семестр

1. Перестановки. Теорема о числе различных перестановок.
2. Транспозиция в перестановке. Теорема о расположении всех перестановок из n символов.
3. Четность, нечетность перестановки. Теорема о транспозиции в перестановках.
4. Подстановки. Транспозиция в подстановках. Четность, нечетность подстановок. Теорема о разложении подстановки в произведении транспозиций.
5. Разложение подстановок в произведении независимых циклов. Утверждения о циклических подстановках.
6. Декремент. Теорема о декременте.
7. Определитель n-го порядка и его свойства.
8. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
9. Миноры и их алгебраические дополнение. Теорема о разложении определителя по элементам некоторой строки.
10. Теорема Лапласа и ее следствие.
11. Вычисление определителей методом рекуррентных соотношений ($\alpha \neq \beta$).
12. Вычисление определителей методом рекуррентных соотношений ($\alpha = \beta$).
13. Матрицы и их элементарные преобразования. Ступенчатая матрица. Теорема о том, что каждую матрицу конечным числом элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.
14. Теорема о том, что если от матрицы A к матрице B можно перейти к.ч.э.п. строк, то и от B к A можно перейти к.ч.э.п. строк.
15. Теорема о неизменности ранга матрицы при элементарных преобразованиях.
16. Ранг матрицы. Теорема о ранге ступенчатой матрицы.
17. Теорема о неизменности ранга матрицы при транспонировании.
18. Эквивалентные системы линейных уравнений. Теорема о том, что если от расширенной матрицы одной системы можно перейти к расширенной матрице другой системы с помощью конечного числа элементарных преобразований строк, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.
19. Исследование ступенчатых систем линейных уравнений (2 случая). Главные и свободные неизвестные. Общей решение СЛУ.
20. Теорема Кронекера-Капелли.
21. Необходимое и достаточное условие определенности совместной системы от n неизвестных Следствие.
22. Теорема о существовании ненулевого решения СЛОУ.
23. Основная теорема теории систем линейных уравнений.
24. Свойства решений СЛОУ. Фундаментальная система решений СЛОУ.
25. Связь между решениями неоднородных и приведенных систем линейных уравнений.
26. Правило Крамера.

27. Действия над матрицами. Свойства действий над матрицами.
28. Ассоциативность умножения матриц.
29. (AB)’=B’A’.
30. Диагональные матрицы, умножение произвольной матрицы на диагональную.
31. Связь элементарных преобразований над матрицами с умножением на элементарные матрицы.
32. Теорема о ранге произведения матриц.
33. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
34. Теорема об определителе произведения матриц.
35. Поле комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
36. Вывод формулы извлечения корня 2-ой степени из комплексного числа в алгебраической форме.
37. Вывод формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме.
38. Вывод формулы деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
39. Формула Муавра. Вывод формулы Муавра.
40. Вывод формулы извлечения корня n-ой степени из комплексного числа.
41. Корни n-ой степени из единицы. Теоремы о корнях n-ой степени из единицы.
42. Первообразные корни n-ой степени из единицы. 2 теоремы о первообразных корнях.

III семестр

1. Аксиоматическое определение линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств. Свойства изоморфного отображения.
2. Теорема о том, что каждый вектор пространства единственным образом представляется как линейная комбинация векторов базиса.
3. Основная теорема об изоморфизме. Следствия.
4. Невырожденность матрицы перехода. Связь координат одного и того же вектора в разных базах.
5. Подпространства линейных пространств. Теорема.
6. Пересечение и сумма линейных подпространств. Теорема.
7. Теорема о размерности суммы двух подпространств.
8. Теоремы о прямых суммах подпространств.
9. Аксиоматическое определение евклидова пространства. Теорема о превращении любого линейного пространства в евклидово.
10. Длина вектора и угол между векторами. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
11. Неравенство Коши - Буняковского.
12. Необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы Грамма.
13. Теорема о том, что всякое евклидово пространство обладает ортогональными базами.
14. Теорема о том, что всякая ортогональная система ненулевых векторов является линейно независимой.
15. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации.
16. Ортонормированная система векторов. Теорема о том, что всякое евклидово пространство обладает ортонормированными базами.
17. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы база евклидова пространства была ортонормированной.
18. Теорема о координатах вектора в ортонормированном базисе.
19. Ортогональное дополнение. Теорема о представлении евклидова пространства в виде прямой суммы подпространства L и его ортогонального дополнения.
20. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства.
21. Изоморфизм евклидовых пространств. Теорема.
22. Линейные преобразования линейных пространств. Действия над линейными преобразованиями.

23. Матрица линейного преобразования. Формула нахождения координат образа вектора при линейном преобразовании.
24. Связь между матрицами линейного преобразования в разных базах.
25. Теорема о существовании и единственности линейного преобразования, переводящего линейно независимые векторы в произвольные.
26. Область значений и ядро линейного преобразования. Теоремы об их размерностях.
27. Теорема о том, что образы и прообразы линейных пространств опять являются линейными пространствами.
28. Неособенные линейные преобразования. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное преобразование было неособенным.
29. Ранг линейного преобразования. Теорема о ранге произвольного линейного преобразования.
30. Инвариантные подпространства. Теорема о том, что ядро и область значений линейного преобразования являются инвариантными подпространствами относительно любого линейного преобразования.
31. Теорема о прямой сумме инвариантных подпространств.
32. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Теорема о том, что собственными значениями линейного преобразования служат действительные характеристические корни линейного преобразования, и только они.
33. Спектр. Теорема о матрице линейного преобразования в базе, состоящей из собственных векторов.
34. Простой спектр. Диагональный вид матрицы линейного преобразования с простым спектром.
35. Теорема о том, что характеристический многочлен любого линейного преобразования не зависит от выбора базиса.
36. Ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц.
37. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы матрица была ортогональной.
38. Теорема о матрице перехода от ортонормированной базы евклидова пространства к любой другой его ортонормированной базе.
39. Ортогональные преобразования евклидовых пространств. Утверждения о них.
40. Свойства ортогональных преобразований.
41. Симметрические преобразования и их свойства.
42. Утверждения о симметрических преобразованиях.
43. Теорема о характеристических корнях симметрического преобразования.
44. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное преобразование евклидова пространства было симметрическим.
45. Приведение квадратичных форм к главным осям. Теорема о существовании ортогональной матрицы, приводящей симметрическую матрицу к диагональному виду.
46. Теорема о приведении действительной квадратичной формы к главным осям.
47. Теорема о коэффициентах канонического вида квадратичной формы, к которому она приводится с помощью ортогонального преобразования.
48. Теорема о собственных векторах симметрического преобразования, относящихся к различным собственным значениям.
49. Пары форм. Теорема о существовании невырожденного линейного преобразования, одновременно приводящего действительную положительно определенную квадратичную форму g к нормальному виду и произвольную действительную форму f – к каноническому.
50. Множества. Операции над множествами и их свойства.
51. Отображения. Виды отображений. Сюрьективные, иньективные, биективные отображения.
52. Понятие алгебраической операции (бинарной, n-арной).
53. Универсальная алгебра. Группоиды, полугруппы, квазигруппы, лупы. Примеры универсальных алгебр.
54. Группы и их подгруппы.
55. Изоморфизм групп. Построение группы подстановок изоморфной данной.
56. Гомоморфизм алгебр. Теоремы о гомоморфизме алгебр. Пример гомоморфных алгебр.

57. Смежные классы и их свойства. Разложение группы на смежные классы по подгруппе.
58. Теорема Лагранжа и ее следствия.
59. Нормальные делители группы, фактор – группы.

7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература

№	Авторы	Наименование	Изд., год изд.	Назначение	Кол-во в библ-ке
1.001	Кострикин А.И.	Введение в алгебру. Часть 1.	М.: Физико-математическая литература, 2004	Учебник	13
1.002	Кострикин А.И	Введение в алгебру. Часть 3.	М.: Физико-математическая литература, 2004	Учебник	13
1.003	Курош А.Г.	Курс высшей алгебры	М.: Наука, 1975, 2004, 2005	Учебник	165
1.004	Мальцев А.И.	Основы линейной алгебры	М.: Наука, 1975	Учебник	15
1.005	Петрова В.Т.	Лекции по алгебре и геометрии. Части 1 и 2	М.: Владос, 1999.	Учебник	15
1.006	Фаддеев Д.К.	Лекции по алгебре	СПб.: Издательство "Лань", 2002.	Учебное пособие	15
1.007	Проскуряков И.В.	Сборник задач по линейной алгебре	М.: Наука,2005	Учебник	45
1.008	Скорняков Л.Я.	Элементы алгебры	М.: Наука, 1986.	Учебник	

7.2. Дополнительная литература

	Автор(ы)	Наименование	Издательство, год издания	Назначение	Кол-во в библиотеке
2.001	Каргополов М.И. , Мерзляков Ю.И.	Основы теории групп.	М., 1982	Учебник	5
2.002	Кострикин А.И.	Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра	М.: Физико-математическая литература, 2004	Учебник	13
2.003	Куликов Л.Я.	Алгебра и теория чисел	М.: Высшая школа, 1979.	Учебник	
2.004	Курош А.Г.	Теория групп.	М.: Наука, 1967.	Учебник	2
2.005	Ляпин Е.С., Евсеев А.Е.	Алгебра и теория чисел. Ч II. Линейная алгебра и полиномы.	М.: Просвещение, 1979.	Учебник	
2.006	Окунев Л.Я.	Высшая алгебра.	М.: Просвещение, 1966	Учебник	
2.007	Табачников С.Л.	Многочлены.	М.: Фазис, 2000.	Учебник	
2.008	Фрид Э.	Элементарное введение в абстрактную алгебру	М., 1979	Учебник	
2.009	Глухов М.М., Солодовников А.С.	Задачник – практикум по высшей алгебре	М.: Просвещение, 1969.	Учебное пособие	
2.010	Гурзо Г.Г.	Индивидуальные задания по теме «Универсальные алгебры».	Якутск, 1991.	Методическое пособие	3
2.011	Гурзо Г.Г.	Лабораторные задания по теме «Линейные пространства».	Якутск, 1996.	Методическое пособие	4
2.012	Гурзо Г.Г., А.И. Антонен А.И.	Лабораторные задания по теме “Линейные преобразования линейных пространств”.	Якутск, 1996.	Методическое пособие	70
2.013	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н.	Индивидуальные задания по теме: «Многочлены».	Якутск, 1994.	Методическое пособие	25
2.014	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н.	Лабораторные задания на тему: «Перестановки и подстановки»	www. sitim.sitc.ru/E-books/index.htm, 2002	Методические указания	
2.015	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н.	Лабораторные задания по теме “Матрицы и системы линейных уравнений”	Якутск, 1994.	Методические указания	
2.016	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н., Иванова А.О., Неустроева Т.К.	Методические указания и контрольные задания по алгебре и теории чисел.	www. sitim.sitc.ru/E-books/index.htm, 2002	Методические указания	
2.017	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н., Иванова А.О., Неустроева Т.К.	Определители	www. sitim.sitc.ru/	Методические указания	
2.018	Гурзо Г.Г., Иванова А.О.	Комплексные числа	www. sitim.sitc.ru, 2002	Методические указания	

2.019	Гурзо Г.Г., Скрябин А.В.	Квадратичные и билинейные формы	Iкутск, 1997.	Методические указания	32
2.020	Гурзо Г.Г., Скрябин А.В.	Лабораторные задания по теме «Евклидовы пространства».	Якутск, 1996.	Методическое пособие	36
2.021	Дмитриев И.Г., Бочарова И.Н., Неустроева Т.К.	Дистанционный курс "Алгебра".	www. sitim.sitc.ru/E-books/index.htm, 2001	Электронный учебник	

Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Якутский государственный университет имени М.К. Аммосова»
Институт математики информатики
Кафедра алгебры и геометрии

Учебно-методический комплекс

дисциплины

«Алгебра»

для студентов очной формы обучения

по специальности 050202 «ИНОФРМАТИКА»

Якутск 2009 г.

Составитель: Бочарова И.Н., к.п.н, доцент,

Учебно-методический комплекс утвержден на заседании кафедры алгебры и геометрии
“ 24 “ февраля 2009 г. протокол №178

Зав.кафедрой алгебры и геометрии,
к.ф-м.н., профессор

Никитина Е.С.

Учебно-методический комплекс утвержден на заседании научно-методического совета института математики и информатики
“   “ ___________2009 г. протокол № _____

Председатель НМК ИМИ,
д.п.н.,профессор Голиков А.И.

Учебно-методический комплекс утвержден на заседании научно – методического Совета ЯГУ
“   “ __________ 2009 г. протокол № _____

Председатель НМС ЯГУ,
к.и.н.,доцент : Стручкова Н.А.

СОДЕРЖАНИЕ

Выписка из учебного плана специальности 050202 Информатика с дополнительной специальностью математика

ВУЗ Якутский государственный университет
Институт Институт математики и информатики
Кафедра алгебры и геометрии
Форма обучения очная
Курс I, II
Семестр I – III семестр

Часов по ГОСу (из РУП) **345** Часов по рабочему учебному плану: **345**
Часов по прим. программе Часов по рабочей программе: **345**
Часов на самостоятельную работу по ППД:
Часов на самостоятельную работу по РУП: 181 (52%)
Часов на самостоятельную работу по РПД: 181 (52%)

Коэффициент уникальности дисциплины: **8,0**

Виды контроля в семестрах (на курсах)	Экзамены	Зачеты	Курсовые проекты	Курсовые работы
	1,3	2		

Распределение часов дисциплины по семестрам

Вид занятий	**№ семестров, число учебных недель в семестрах**																					
	1	*14*	**2**	*22*	**3**	*14*	**4**	*22*	**5**		**6**		**7**		**8**		**9**		**10**		**Итого**	
	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД	РУП	РПД
Лекции	28	28	22	22	14	14															64	64
Лабораторные																						
Практические	28	28	44	44	28	28															100	100
КСР																						
Ауд. занятия	56	56	66	66	42	42															164	164
Сам. работа	61	61	60	60	60	60															181	181
Итого	117	117	126	126	102	102															345	345

1. **Требования к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы подготовки учителя информатики и математики по специальности 050202-Информатика с доп. Специальностью Математика**

Индекс	Наименование дисциплины и ее основные разделы	Всего часов
СД Ф.6	Алгебры, алгебраические системы.	**345**
	Понятия группы, кольца, поля.	
	Расширения полей, алгебраические и конечные расширения, приложение к задачам на построение с помощью циркуля и линейки.	
	Поле комплексных чисел. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.	
	Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теория делимости.	
	Неприводимые над полем действительных чисел многочлены.	
	Матрицы и определители.	
	Системы линейных уравнений.	
	Линейные (векторные) пространства.	
	Евклидовы пространства.	
	Линейные преобразования и их матрицы.	
	Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.	
	Подгруппы.	
	Смежные классы по подгруппе, фактор-группы.	
	Кольца главных идеалов.	
	Многочлены от нескольких переменных, симметрические многочлены.	

2. **ТРЕБОВАНИЯ СТАНДАРТА К УРОВНЮ ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКА по специальности 050202 Информатика с доп. специальностью Математика**

Специалист должен отвечать следующим требованиям:

1.1. Уметь осуществлять процесс обучения учащихся средней школы с ориентацией на задачи обучения, воспитания и развития личности школьников и с учетом специфики преподаваемого предмета.

1.2. Уметь стимулировать развитие внеурочной деятельности учащихся с учетом психологических требований, предъявляемых к образованию и обучению.

1.3. Уметь анализировать собственную деятельность, с целью ее совершенствования и повышения квалификации.

1.4. Уметь выполнять методическую работу в составе школьных методических объединений.

1.5. Уметь выполнять работу классного руководителя, поддерживать контакт с родителями.

1.6. Владеть основными понятиями математики.

1.7. Уметь использовать математический аппарат при изучении и количественном описании реальных процессов и явлений.

1.8. Иметь целостное представление о математике как о науке, ее месте в современном мире и в системе наук.

3. ПРИНЦИПЫ И ЦЕЛИ.

3.1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ КУРСА:

1. Данный курс разработан в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 050202 Информатика с доп. Специальностью Математика квалификация – учитель информатики и математики.
2. Основной целью курса является освоение основных алгебраических понятий и задач на уровне высшей школы и подготовка к изучению других математических дисциплин (аналитическая и дифференциальная геометрия, топология, математический анализ и т.д.), воспитание у студентов культуры мышления и доказательства математических утверждений.
3. Материал курса в значительной мере представлен в школьной математике, поэтому предполагает предметную подготовку будущих учителей, как в смысле навыков, так и в смысле необходимого объема знаний. На его основе выпускники должна получить достаточную математическую культура для понимания основного школьного курса математики и факультативных курсов.
4. Программа предполагает индуктивное построение курса.
5. Основными формами проведения занятий по алгебре являются лекции, лабораторные занятия и самостоятельная работа. Курс имеет практическую направленность: лабораторные занятия - 100 ч., самостоятельная работа - 181 ч.
6. Текущий контроль в течение семестра осуществляется в виде контрольных работ, диктантов и коллоквиумов. Итоговый контроль предполагает зачеты в 2 семестрах и экзамены в 1 и 3 семестрах.
7. В рамках самостоятельной работы студенты выполняют домашние (индивидуальные) задания, прорабатывают теоретический материал, работают с конспектом лекций и над учебным материалом, готовят реферат.

3.2. ЦЕЛИ КУРСА

№ Цели	**Содержание цели**
	Студент должен **иметь представление**
1.	О предмете курса и истории развития алгебры.
2.	Об основных разделах алгебры и линейной алгебры
3.	О методах алгебры и линейной алгебры в изучении других математических дисциплин
	Студент должен **знать**
4.	Все основные определения и понятия по теории систем линейных уравнений, многочленов, групп, теории квадратичных форм, линейных пространств, линейных преобразований, по кольцам, алгебрам и алгебраическим системам.
5.	Основные направления исследований и основные методы, используемые в алгебре.
6.	О взаимосвязях между основными разделами алгебры.
	Студент должен **уметь**
7.	Решать основные виды задач: a)извлечения корней из комплексного числа; b)деление многочленов с остатком; c)нахождение НОД многочленов; d)нахождение корней многочлена; e)вычисление определителя; f)решение систем линейных уравнений; g)нахождение базиса системы векторов; h)нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования; i)приведение квадратичных форм к главным осям.
8.	Доказывать наиболее важные математические утверждения в курсе алгебры.
9.	Применять материал курса для работы в школе: факультативные занятия, спецкурсы

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ КУРСА.

Разделы дисциплины и виды занятий

Код учебного занятия	Номер учебной недели	Вид и номер занятия	Объем в часах	Тема занятия
СЕМЕСТР 1				
(14 учебных недель. В неделю: 2 часа лекций; 2 часа практики)				
Модуль 1 (14 неделя – контрольная точка)				
Раздел 1.1. Матрицы и определители. (50)				
1.01.01.01	1	Лекц.1	2	1.Предмет курса. Краткий исторический обзор развития алгебры.
1.01.01.02	2	Лекц.2	2	2.Перестановки и подстановки: Теорема о числе различных перестановок из n символов. Понятия транспозиции в перестановках, инверсии, четных и нечетных перестановок. Теорема о транспозиции в перестановке. Теорема о расположении всех n! Перестановок из n символов.
1.01.01.03	1	Практ.1	2	2. Перестановки и подстановки: Понятия транспозиции в перестановках, инверсии, четных и нечетных перестановок. Определение четности перестановок.
1.01.01.04	3	Лекц.3	2	3.Понятия подстановки, четной (нечетной) подстановки, тождественной. Умножение подстановок, свойства. Понятия транспозиции, циклической подстановки. Теорема о разложении подстановки в произведение транспозиций. Утверждения о циклических подстановках. Теорема о декременте подстановки.
1.01.01.05	2	Практ.2	2	3. Понятия подстановки, четной (нечетной) подстановки, тождественной. Умножение подстановок. Понятия транспозиции, циклической подстановки. Определение четности подстановки тремя способами. Решение уравнений в подстановках. Возведение в степень.
1.01.01.06		Сам. раб.	7	2-3. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Перестановки и подстановки».
1.01.01.07	3	Практ.3	2	2-3. Диктант и к/р по теме «Перестановки и подстановки».
1.01.01.08	4-5	Лекц.4-5	4	4. Квадратные матрицы и их определители. Основные свойства определителей.
1.01.01.09	4	Практ.4	2	4. Квадратные матрицы и их определители. Основные свойства определителей. Минор, дополнительный минор.
1.01.01.10	6-7	Лекц.6-7	4	5. Минор, дополнительный минор. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение. Разложение определителя по строке или столбцу. Теорема Лапласа.
1.01.01.11	5	Практ.5	2	5.Методы вычисления определителей. Вычисление определителей: разложением по строке или столбцу, с помощью теоремы Лапласа.
1.01.01.12	8-9	Лекц.8-9	4	6.Методы вычисления определителей. Метод рекуррентных соотношений (два случая). Правило Крамера.
1.01.01.13	6	Практ.6	2	6. Методы вычисления определителей. Метод рекуррентных соотношений (два случая). Правило Крамера.
1.01.01.14		Сам. раб.	11	4-6. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к

				диктанту и коллоквиуму по теме «Определители n-го порядка»
1.01.01.15	7	Практ.7	2	4-6. Диктант и к/р по теме «Определители n-го порядка».
Раздел 2.2. Матрицы и системы линейных уравнений. (28)				
1.01.02.01	10	Лекц.10	2	7. Матрицы и их элементарные преобразования. Понятие ступенчатой матрицы. Теорема о том, что любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью к.ч.п.с. Теорема о том, что если от матрицы А к матрице В можно перейти к.ч.э.п. строк, то и от В к А можно перейти к.ч.э.п. строк. Ранг матрицы. Теоремы о ранге матриц: Теорема о неизменности ранга матрицы при транспонировании, выполнении к.ч.э.п. строк (столбцов) Теорема о ранге ступенчатой матрицы.
1.01.02.02	8	Практ.8	2	7. Матрицы и их элементарные преобразования. Понятие ступенчатой матрицы. Приведение произвольной матрицы к ступенчатому виду с помощью к.ч.э.п. строк. Ранг матрицы (2 способа).
1.01.02.03	11	Лекц.11	2	8. Системы линейных уравнений. Понятие решения СЛУ. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные СЛУ. Эквивалентные системы уравнений. Теорема о том, что если от А можно перейти к В с помощью к.ч.э.п.с., то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны. Решение систем линейных уравнений ступенчатого вида (два случая). Метод Гаусса. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы. Теорема Кронекера-Капелли. Необходимое и достаточное условие, чтобы совместная система была определенной. Следствия. Основная теорема систем линейных уравнений.*.
1.01.02.04	9	Практ.9	2	8. Системы линейных уравнений. Понятие решения СЛУ. Решение систем линейных уравнений ступенчатого вида (два случая). Метод Гаусса. Главные и свободные неизвестные. Общее решение системы.
1.01.02.05	12-13	Лекц.12-13	4	9. Алгебра матриц: Матрицы и действия над ними. Свойства действий над матрицами. Элементарные матрицы. Связь элементарных преобразований с умножением на элементарные матрицы.* Диагональные матрицы, умножение произвольной матрицы на диагональную.*. Теорема о ранге произведения матриц. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Формула для нахождения обратной матрицы. Определитель произведения матриц.
1.01.02.06	10	Практ.10	2	9. Алгебра матриц: Матрицы и действия над ними. Свойства действий над матрицами. Элементарные матрицы. 2 способа нахождения обратной матрицы. Решение матричных уравнений. Представление невырожденных матриц в виде произведения конечного числа элементарных матриц. 2 способа нахождения обратной матрицы.
1.01.02.07		Сам. раб.	12	7-9. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Матрицы и системы линейных уравнений»
1.01.02.08	11	Практ.11	2	7-9. Диктант и к/р по теме «Матрицы и системы линейных уравнений».
Раздел 3.3. Поле комплексных чисел и обобщение материала семестра. (39)				
1.01.03.01	14	Лекц.14	2	10. Поле комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Действия над комплексными

				числами в тригонометрическом виде. Извлечения корня квадратного их комплексного числа в алгебраическом виде. Возведение в степень и извлечение корня. Геометрическое представление комплексных чисел и операции над ними. Сопряженные и обратные числа, их изображение на комплексной плоскости. * Группа корней n-ой степени из единицы. Первообразные корни. Теоремы о первообразных корнях.
1.01.03.02	12	Практ.12	2	10. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами в тригонометрическом виде. Извлечения корня квадратного их комплексного числа в алгебраическом виде. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
1.01.03.03	13	Практ.13	2	11. Возведение в степень и извлечение корня. Решение уравнений над полем комплексных чисел. Нахождение сумм тригонометрических функций.
1.01.03.04		Сам.раб	7	10-11. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Комплексные числа»
1.01.03.05	14	Практ.14	2	10-11. Диктант и к/р по теме «Комплексные числа».
1.01.03.06		Сам. раб.	24	1-11. Обобщение материала семестра. Подготовка к экзамену.
СЕМЕСТР 2				
(22 учебных недель. В неделю: 2 часа лекций; 2 часа практики)				
Модуль 2 (22 неделя – контрольная точка)				
Раздел 1.1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем комплексных чисел. Теория делимости . (62)				
2.02.01.07	1	Лекц.1	2	1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем: Понятие многочлена (полинома) от одной переменной над полем. Операции над многочленами и их свойства. Алгоритм деления с остатком.
2.02.01.08	1-2	Практ.1-2	4	1. Кольцо многочленов от одной переменной над полем: Понятие многочлена (полинома) от одной переменной над полем. Алгоритм деления с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Применение теоремы о НОД многочленов и ее следствия.
2.02.01.09	2	Лекц.2	2	2. Делители. Свойства делимости. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Теорема о НОД многочленов. Следствие. Свойства взаимно простых многочленов.*
2.02.01.10	3-5	Практ.3-5	6	2. Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Разложение многочлена в сумму степеней линейного двучлена. Отделение кратных корней, определение кратности корня. Разложение многочленов в произведение степеней линейных двучленов и многочленов второй степени с комплексными корнями. Формулы Виета.
2.02.01.11	3	Лекц.3	2	3. Корни многочленов. Теорема Безу. Схема Горнера. Теорема о разложении многочлена в сумму степеней линейного двучлена. Кратные корни. Теорема о понижении кратности корня.
2.02.01.12	6-9	Практ.6-9	8	3. Определение границ корней многочлена, нахождение рациональных корней целочисленных многочленов. Решение уравнений 3 и 4 степени в поле комплексных чисел. Формула Кардано, метод Феррари. Интерполяция: интерполяционный многочлен Лагранжа, метод интерполяции Ньютона. Границы корней многочлена.

				Теорема Штурма. Построение ряда Штурма. Приближенное вычисление корней многочлена.
2.02.01.13	4	Лекц.4	2	4. Основная теорема алгебры комплексных чисел.* Следствия для многочленов с комплексными, действительными коэффициентами. Формулы Виета.
2.02.01.14	5	Лекц.5	2	5. Рациональные корни целочисленных многочленов. Теоремы.
2.02.01.15	6	Лекц.6	2	6. Алгебраическое решение уравнений 3 и 4 степени. Формула Кардано, метод Феррари.* Интерполяция: интерполяционный многочлен Лагранжа, метод интерполяции Ньютона. Границы корней многочлена. Теорема Штурма. Построение ряда Штурма. Приближенное вычисление корней многочлена.*
2.02.01.16	10-11	Практ.10-11	4	6. Разложение многочленов на неприводимые множители: Приводимость многочленов над полем рациональных чисел. Критерий Эйзенштейна. Рациональные дроби. Правильные рациональные дроби. Разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей.
2.02.01.17	7	Лекц.7	2	7. Разложение многочленов на неприводимые множители: Понятие приводимых и неприводимых многочленов над полем. Свойства неприводимых многочленов. Приводимость многочленов над полем рациональных чисел. Критерий Эйзенштейна.
2.02.01.18	8	Лекц.8	2	7. Рациональные дроби. Правильные рациональные дроби. Теорема о разложении рациональной дроби в сумму многочлена и правильной дроби. Простейшие дроби. Теорема о существовании и единственности разложения правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей(основная теорема теории рациональных дробей).
2.02.01.19		Сам.раб	22	1-7. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Кольцо многочленов от одной переменной над полем комплексных чисел. Теория делимости»
2.02.01.20	12	Практ.12	2	1-7. Диктант и к/р по теме «Кольцо многочленов от одной переменной над полем комплексных чисел. Теория делимости».
Раздел 2.2. Кольцо многочленов от нескольких переменных над полем P. Симметрические многочлены. (12)				
2.02.02.01	9	Лекц.9	2	8. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Основная теорема теории симметрических многочленов.
2.02.02.02	13-14	Практ.13-14	4	8. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Разложение многочленов симметрических многочленов в многочлен от элементарных симметрических многочленов.
2.02.02.03		Сам.раб	4	8. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Симметрические многочлены»
2.02.02.04	15	Практ.15	2	8. Диктант и к/р по теме «Симметрические многочлены».
Раздел 3.3. Квадратичные формы и обобщение материала семестра (22)				
2.02.03.01	10-11	Лекц.10-11	4	9. Квадратичные формы. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Основная теорема о квадратичных формах. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

2.02.03.02	16-18	Практ.16-18	6	9. Квадратичные формы. Канонический и нормальный вид квадратичной формы. Основная теорема о квадратичных формах. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
2.02.03.03		Сам.раб	10	9. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Квадратичные формы»
2.02.03.04	19	Практ.19	2	9. Диктант и к/р по теме «Квадратичные формы».
Раздел 4.4. Линейные (векторные) пространства и обобщение материала семестра(30)				
2.02.04.01	20-21	Практ.20-21	4	10. Определение n – мерного векторного пространства. Определения линейной зависимости векторов. Максимальная линейно независимая система векторов и ее свойства. Эквивалентные системы векторов. Нахождение максимальной линейной независимой подсистемы заданной системы векторов. Пространство решений систем линейных однородных уравнений: Свойства решений СЛОУ. Фундаментальная система решений. Базис пространства решений СЛОУ. Связь решений неоднородной и приведенной однородной систем линейных уравнений. Решение СЛОУ
2.02.04.02	22	Практ.22	2	10. Сводная контрольная работа по материалам 1 и 2 семестра.
2.02.04.03		Сам. раб	24	1-10. Обобщение материала семестра. Подготовка к зачету.
СЕМЕСТР 3				
(14 учебных недель. В неделю: 2 часа лекций; 2 часа практики)				
Модуль 3 (14 неделя – контрольная точка)				
Раздел 1.1. Линейные (векторные) пространства(20)				
3.03.01.01	1	Лекц.1	2	1. Векторные (линейные) пространства. Аксиоматическое определение линейного пространства, базис и размерность пространства. Теорема о единственности разложения произвольного вектора линейного пространства в линейную комбинацию базисных векторов. Изоморфизм линейных пространств. Основная терема об изоморфизме линейных пространств. Невырожденность матрицы перехода от одного базиса к другому. Связь координат одного и того же вектора в разных базах.
3.03.01.02	1	Практ.1	2	1. Аксиоматическое определение линейного пространства, базис и размерность пространства. Координаты вектора в заданном базисе. Невырожденность матрицы перехода от одного базиса к другому. Связь координат одного и того же вектора в разных базах.
3.03.01.03	2	Лекц.2	2	2. Подпространства линейных пространств. Линейная оболочка множества векторов. Пересечение, сумма, прямая сумма подпространств. Теорема о том, что пересечение и сумма линейных подпространств есть подпространство. Теорема о размерности суммы двух подпространств. Теоремы о прямых суммах подпространств. Линейное многообразие.
3.03.01.04	2	Практ.2	2	2. Подпространства линейных пространств. Линейная оболочка множества векторов. Базис и размерность пересечение, сумма, прямая сумма подпространств. Линейное многообразие. Вектор сдвига и направляющее подпространство линейного многообразия, заданного СЛНУ.
3.03.01.05		Сам.раб	10	1-2. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Линейные (векторные) пространства»

3.03.01.06	3	Практ.3	2	1-2. Диктант и к/р по теме «Линейные (векторные) пространства».
Раздел 2.2. Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы (28)				
3.03.02.01	3-4	Лекц.3-4	4	3. Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы. Теорема о существовании и единственности линейного преобразования, переводящего линейно независимые векторы в произвольные. Координаты образа вектора. Связь между матрицами одного и того же линейного преобразования в различных базисах. Действия над линейными преобразованиями. Образы и прообразы линейных пространств относительно линейного преобразования. Теорема о том, что образы и прообразы линейных подпространств являются линейными пространствами. Область значений и ядро линейного преобразования. Теорема о том, что ядро и область значений являются подространствами. Теорема о том, что ядро линейного преобразования есть пространство решений СЛОУ. Ранг и дефект линейного преобразования. Теоремы о размерностях ядра и области значений. Теорема о ранге произвольного линейного преобразования. Неособенные линейные преобразования. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное преобразование было неособенным.* Инвариантные подпространства. Теорема о том, что ядро и область значений линейного преобразования являются инвариантными подпространствами относительно любого линейного преобразования. Теорема о прямой сумме инвариантных подпространств.*
3.03.02.02	4	Практ.4	2	3. Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы. Координаты образа вектора. Связь между матрицами одного и того же линейного преобразования в различных базисах. Действия над линейными преобразованиями. Область значений и ядро линейного преобразования. Ранг и дефект линейного преобразования
3.03.02.03	5	Лекц.5	2	4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов (преобразований) и их свойства. Теорема о том, что собственными значениями линейного преобразования служат действительные характеристические корни линейного преобразования, и только они. Спектр. Теорема о матрице линейного преобразования в базе, состоящей из собственных векторов. Простой спектр. Диагональный вид матрицы линейного преобразования с простым спектром.
3.03.02.04	5	Практ.5	2	4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов (преобразований) и их свойства. Отыскание собственных значений линейного преобразования через характеристический многочлен. Диагональный вид матрицы линейного преобразования с простым спектром. Ортогональные и симметрические преобразования: Ортогональные матрицы. Ортогональные преобразования евклидовых пространств. Симметрические преобразования и их свойства.
3.03.02.05	6	Лекц.6	2	5. Ортогональные и симметрические преобразования: Ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы матрица была ортогональной. Теорема о матрице перехода от ортонормированной базы евклидова пространства к

				любой другой его ортонормированной базе. Ортогональные преобразования евклидовых пространств. Утверждения о них. Свойства ортогональных преобразований. Симметрические преобразования и их свойства. Утверждения о симметрических преобразованиях. Теорема о характеристических корнях симметрического преобразования. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное преобразование евклидова пространства было симметрическим. Теорема о собственных векторах симметрического преобразования, относящихся к различным собственным значениям.
3.03.02.06	6	Практ.6	2	5. Приведение квадратичных форм к главным осям. Отыскание вырожденного линейного преобразования, одновременно приводящего действительную положительно определенную квадратичную форму g к нормальному виду и произвольную действительную форму f – к каноническому.
3.03.02.07	7	Лекц.7	2	6. Приведение квадратичных форм к главным осям. Теорема о существовании ортогональной матрицы, приводящей симметрическую матрицу к диагональному виду. Теорема о коэффициентах канонического вида квадратичной формы, к которому она приводится с помощью ортогонального преобразования. Пары форм. Теорема о существовании невырожденного линейного преобразования, одновременно приводящего действительную положительно определенную квадратичную форму g к нормальному виду и произвольную действительную форму f – к каноническому.
3.03.02.08		Сам.раб	10	3-6. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы»
3.03.02.09	7	Практ.7	2	3-6. Диктант и к/р по теме «Линейные преобразования линейных пространств и их матрицы».
Раздел 3.3. Евклидовы пространства.(16)				
3.03.03.01	8	Практ.8	2	7. Евклидовы пространства. Ортонормированная система векторов. Процесс ортонормирования. Длина вектора и угол между векторами. Определитель Грамма. Необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы Грамма.
3.03.03.02	9	Практ.9	2	8. Ортогональное дополнение к подпространству. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства.
3.03.03.03		Сам.раб	10	7-8. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Евклидовы пространства»
3.03.03.04	10	Практ.10	2	7-8. Диктант и к/р по теме «Евклидовы пространства».
Раздел 4.4. Элементы общей алгебры и обобщение материала семестра. (38)				
3.03.04.01	11	Практ.11	2	9. Понятие алгебраической операции (бинарной, n-арной). Универсальная алгебра. Группоиды, полугруппы, квазигруппы, лупы. Примеры универсальных алгебр.
3.03.04.02	12-13	Практ.12-13	4	10. Группы и их подгруппы. Изоморфизм групп. Построение группы подстановок изоморфной данной. Смежные классы и их свойства. Теорема Лагранжа и ее следствия. Разложение группы на смежные классы по подгруппе, нормальные делители группы, фактор –

				группы.
3.03.04.03		Сам.раб	8	9-10. Выполнение индивидуальных заданий, подготовка к диктанту и коллоквиуму по теме «Универсальные алгебры»
3.03.04.04	14	Практ.14	2	9-10. Диктант и к/р по теме «Универсальные алгебры».
3.03.04.05		Сам. раб	22	1-10. Обобщение материала семестра. Подготовка к экзамену.

5 Тематика лабораторных и письменных работ	
5.1 Лабораторные работы	
№	**Наименование (тема) лабораторных работы**
5.1.1	Не предусмотрено
5.2 Индивидуальные задания	
№	**Перечень рекомендуемых тем**
5.2.1	Решение систем линейного уравнения (23 задачи, 20 часов) – Метод Гаусса решения систем лин. уравнения с единственным решением (13 задач, 6 часа) – Метод Гаусса решения систем лин. уравнения с бесконечным числом решений (8 задач, 6 часа) – Метод Гаусса при доказательстве несовместности систем лин. уравнения (2 задачи, 2 часа) – Метод Крамера решения систем линейного уравнения, различные случаи (3 задачи, 4 часа) – Метод решения систем линейного уравнения с помощью матриц (2 задачи, 2 часа)
5.2.2	Матрицы и системы линейных уравнений (15 задач, 20 часов) – Произведение матриц (6 задач, 2 часа) – Нахождение определителей матриц (12 задач, 14 часов) – Нахождение обратных матриц (6 задач, 4 часа)
5.2.3	Комплексные числа – Арифметические действия с комплексными числами (6 задач, 1 час) – Тригонометрическая форма комплексных чисел (6 задачи, 4 часа) – Комплексные корни многочленов (2 задачи, 1 час) – Геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций над ними (1 задача, 0,5 часа)
5.2.4	Многочлены – Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида (3 задачи, 1 час) – Схема Горнера, разложение многочлена по степеням (2 задачи, 1 час) – НОД многочленов (2 задачи, 2 часа) – Разложение многочленов на не приводимые множители. Отделение кратных множителей. Корни многочлена (2 задачи, 2 часа) – Связь корней многочлена с его коэффициентами. Теорема Виета (2 задачи, 2 часа) – Корни многочлена с действительными коэффициентами. Оценки корней. (2 задачи, 1 час) – Отыскание целых и рациональных корней многочлена (3 задачи, 2 часа) – Симметрические многочлены (4 задачи, 2 часа)
5.2.5	Векторные пространства – Базис. Размерность (5 задач, 3 часа) – Координаты вектора. Преобразование координат (1 задача, 2 часа) – n-мерные векторы. Линейная зависимость (3 задачи, 1 час) – суммы подпространств и линейные многообразия (3 задачи, 6 часов)

5.2.6	Евклидовы пространства – Скалярное произведение (10 задач, 3 часа) – Длина и угол (10 задач, 2 часа) – Проекция вектора (3 задачи, 3 час) – Ортогонализация Грамма-Шмидта (2 задачи, 6 часов)
5.2.7	Линейные преобразования и матрицы – Ядро линейного преобразования (2 задачи, 4 часа) – Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (3 задачи, 4 часа) – Характеристический многочлен (3 задачи, 4 часа) – Жорданова форма матрицы (3 задачи, 4 часа)
5.2.8	Приведение квадратичной формы к каноническому виду – приведение к каноническому и нормальному виду (3 задачи, 4 часа)
5.2.9	Группы Изоморфизм групп
5.3 Упражнения для закрепления и самоконтроля из конспекта лекций	
№	
5.3.1	По каждой теме по 2-7 задач

5.4 Формы самоконтроля		
№	**Наименование (тема) лабораторных работы**	**Формы самоконтроля**
5.4.1	Лабораторные занятия	нет
5.4.2	Индивидуальные задания	проверка решений и ответов
5.4.5	Упражнения	нет

6. КОНТРОЛИРУЮЩИЙ МАТЕРИАЛ

Фонд материалов, контролирующих деятельность студента, содержит:
- тексты тематических контрольных работ;
- тексты контрольных работ по проверке остаточных знаний за первый, второй, третий семестры;
- вопросы диктантов;
- вопросы коллоквиумов по темам;
- темы рефератов;
- зачетные работы;
- экзаменационные материалы.

6.1.Тексты тематических контрольных работ

1 СЕМЕСТР

Контрольная работа по теме «Перестановки и подстановки»

Вариант 1.

1. В следующих перестановках определить число инверсий и указать общий признак тех чисел, для которых эта перестановка четная и тех, для которых она нечетная:

a) 1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 10, 7, 9, … , 5n-4, 5n-2, 5n, 5n-3, 5n-1;

b) 1, 6, 11, … , 5n-4, 3, 8, 13, … , 5n-2, 5, 10, 15, … , 5n, 2, 7, 12, … , 5n-3, 4, 9, 14, … , 5n-1.

2. Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций. Определить четность подстановки тремя способами:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 10 & 5 & 6 & 7 & 1 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & ... & 5n-4 & 5n-3 & 5n-2 & 5n-1 & 5n \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 7 & 9 & ... & 5n-4 & 5n-2 & 5n & 5n-3 & 5n-1 \end{pmatrix}$;

3. Найти A^{100}, где A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Решить уравнения в подстановках: a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$*X*(1, 2)(3, 4)(6, 5)=(1, 2, 3, 4, 5, 6);

   b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$*X=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить подстановки седьмой степени: (1, 2, 3)*(2, 3, 4)*(6, 7)*(1, 5).

Контрольная работа по теме «Определители»

Вариант 1

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x & \dots & n \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\,2} & \dots & x_1^{\,n-2} & x_1^{\,n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & \dots & x_2^{\,n-2} & x_2^{\,n-1} \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \dots & x_n^{\,n-2} & x_n^{\,n-1} \end{vmatrix}$

Контрольная работа по теме "Системы линейных уравнений"

Вариант 1

1. Исследовать систему, заданную расширенной матрицей. Найти общее решение в зависимости от параметра *k*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 1 & k & 0 \\ 1 & k & k & 2 \\ 2 & 3 & k & 3 \end{array}\right)$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

3. Решить систему (найти общее решение и фундаментальную систему решений):

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Контрольная работа по теме "Матрицы"

Вариант 1

1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Для матрицы A найти такую матрицу X, что XA=C, где C - некоторая ступенчатая матрица, эквивалентная матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Для данной матрицы A найти обратную матрицу двумя способами. Представить данную матрицу в виде произведения элементарных матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Контрольная работа по теме «Комплексные числа»

Вариант 1

1. Решить уравнения в поле комплексных чисел: x^4+i=0.
2. Найти все значения корня, не переходя к тригонометрической форме: $\sqrt{20-21i}$.

3. Вычислить, используя правила действий над комплексными числами в тригонометрической форме: $\dfrac{(1+i)^{30}}{2(1-i)^{27}}$.
4. Выразить $f\left(\left(\left[\dfrac{30-k}{4}\right]+3\right)x\right)$ через $\sin x$ и $\cos x$, где $f(x)=\begin{cases}\sin x, & k=\overline{1,15}\\ \cos x, & k=\overline{16,30}\end{cases}$.

<u>2 СЕМЕСТР</u>

Контрольная работа по теме «Многочлены. Рациональные дроби»

Вариант 1.

1. Найти рациональные корни многочлена $2x^3-x^2+4x-2$.
2. Данную рациональную дробь представить в виде суммы простейших дробей в поле рациональных чисел $\dfrac{2x+1}{x^3-x^2}$.
3. Найти НОД многочленов $f(x)=(x+1)^2(x-2), g(x)=(x+1)(x-2)^2, h(x)=x^2-x-2$.
4. Избавиться от кратных корней $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$.
5. Разложить многочлен x^4+5x^3-3x+2 по степеням $x-1$.

Контрольная работа по теме «Многочлены. Квадратичные формы»

Вариант 1

1. а) Найти невырожденные линейные преобразования, приводящие квадратичные формы f и g к нормальному виду.
   б) Определить есть ли среди форм f и g положительно определенные или распадающиеся.
   с) Найти, если это возможно невырожденное линейное преобразование, переводящее квадратичную форму f в квадратичную форму g. Сделать проверку.
   $f=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$,
   $g=2x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_3+2x_2x_3$
2. Найти рациональные корни многочлена $f(x)=2x^4-x^3-4x^2+10x-4$.
3. Найти сумму кубов и сумму квадратов корней многочлена $f(x)=2x^8+3x^6-9x^5+x^2-7$.

<u>3 СЕМЕСТР</u>

Контрольная работа по теме «Векторные пространства»

Вариант 1.

1. Найти базис и размерность суммы подпространств L_1 и L_2, а также размерность их пересечения. L_1 – линейная оболочка, натянутая на векторы (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 0, 2, 0), (1, 0, 2, -1); L_2 – пространство решений СЛОУ $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3-4x_4=0\\ x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases}$.
2. Найти вектор сдвига, размерность и базу направляющего подпространства линейного многообразия, заданного системой линейных уравнений:
$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\ x_3+x_4+3x_5=2\\ 3x_4+2x_5=2\end{cases}$$
3. Найти матрицу перехода от базиса a_1=(1, 0, 1), a_2=(0, 1, 1), a_3=(0, 1, -1) к базису b_1=(1, 2, 1), b_2=(0, 0, 1), b_3=(1, 1, 1). Найти координаты вектора x=(2, 1, 2) в обоих базисах.
4. Найти координаты многочлена $f(x)=2x^2-5x+3$ в базе x^2-x+1, $3x-5$, 4.
5. Определить, будет ли сумма двух линейных оболочек, натянутых на векторы a_1=(1, 0, 1, 0), a_2=(2, 0, -2, 0) и b_1=(1, 2, 2, -3), b_2=(1, 2, -2, -3) соответственно, прямой?

Контрольная работа по теме «Линейные преобразования и их матрицы»
Вариант 1

1. Найти ядро, область значений, ранг, дефект линейного преобразования пространства заданного в некотором базисе матрицей А.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Найти матрицу линейного преобразования $2\varphi\psi$ в базисе b_1, b_2, если преобразование φ в базисе a_1, a_2 имеет матрицу A_φ, а преобразование ψ в базисе b_1, b_2 имеет матрицу B_ψ.
$$\begin{matrix} a_1 = (2,5) & b_1 = (2,2) \\ a_2 = (1,3) & b_2 = (1,2) \end{matrix} \quad A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ B_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
3. Найти размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия заданного следующей системой:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Контрольная работа по теме: «Евклидовы пространства»
Вариант 1.

1. Найти ортонормированный базис пространства решений системы:
$$\begin{cases} x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \end{cases}.$$
2. Найти ортогональное дополнение ядра линейного преобразования φ евклидова пространства, заданного матрицей: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти диагональную матрицу подобную матрице А: А=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 80 \end{pmatrix}$.
4. Пусть $[x_1, x_2, x_3]$ – строка координат вектора x в некотором ортонормированном базисе. Будет ли линейное преобразование φ евклидова пространства а) ортогональным, б) симметрическим.
$$[x\varphi] = [\frac{\sqrt{2}}{2}x_1, -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2, 0].$$
5. Привести квадратичную форму f к главным осям: $f = 3x_1^2 + 8x_2^2 + 6x_2x_3$.

Контрольная работа «Группы. Фактор-группы»
Вариант 1.

1. Какие из указанных числовых множеств являются группами. Ответ обосновать. $\langle A, \cdot \rangle$, где А – одно из множеств N, Q, R.
2. Образуют ли группу относительно операции умножения множество матриц вида: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $a \in R$.
3. Образуют ли группу относительно операции сложения множество матриц вида: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, где a, b $\in R$.
4. Ассоциативна ли операция * на множестве Z, если $x*y = x^2 + y^2$.

5. Найти порядок элемента группы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$
6. Найти правые и левые классы смежности группы S_3 по подгруппе H=[(1, 2)].
7. Построить фактор-группу Z_k/Z_l, если k=6, l=18. И построить группу подстановок, изоморфную группе Z_k/Z_l.
8. Найти все подгруппы, аддитивной группы целых чисел, порожденной элементами a, b, c, если a=4, b=6, c=10.

6.2. Тесты по темам.

Тест по теме «Перестановки и подстановки»

Вариант 1

1. Сколько существует различных перестановок из пяти символов.

   Ответ: а) 5; б) 10; в) 35; г) 120; д) 135; е) 200; ж) 210.
2. В подстановке (15)(234) перейти от записи в циклах к записи двумя строками с натуральным расположением чисел 1, 2, 3, …, n в верхней строке и подсчитать число инверсий в нижней строке.

   Ответ: а) 0; б) -1; в) 2; г) 4; д) 7; е) 12; ж) 9; з) 15.
3. Найти наименьшее k, удовлетворяющее равенству A^k=E, где

   $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Ответ: а) 5; б) 7; в) 9; г) 8; д) 3; е) 14; ж) 15.
4. Чему равен декремент подстановки A^{110}, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

   Ответ: а) -1; б) 0; в) 5; г) 7; д) 4; е) -9; ж) 8; з) 3.
5. Найти декремент подстановки X, удовлетворяющей равенству AX=B, где

   $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Ответ: а) 3; б) 2; в) 5; г) 7; д) 1; е) 4; ж) 6.

Тест №3. Определители.

Вариант 1

1. Какое из указанных ниже чисел равно определителю матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

   Ответ: а) 10; б) -10; в) 2; г) -2; д) 4; е) –4; ж) 5; з) -5.
2. Какое из указанных ниже чисел равно определителю матрицы $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & ... & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & ... & 0 & 3 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & n \end{pmatrix}$, порядка n.

Ответ: а) n^n; б) n^{-n}; в) $(-1)^{C_n^2}\cdot n!$; г) $n!$; д) $\prod_{i=1}^{n}(-i)$.

3. При каких значениях i и j выражение $a_{12}a_{2i}a_{33}a_{4j}a_{54}$ входит в состав определителя пятого порядка со знаком «+».

   Ответ: а) i=1, j=5; б) i=5, j=1; в) i=5, j=4; г) i=1, j=3.

4. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{23} в матрице A=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **Ответ:** а) 7; б) –7; в) –3; г) 3; д) 0.

5. Определитель D=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ третьего порядка равен 4. Чему равен определитель Q, полученный из определителя D путем прибавления к элементам второй строки всех остальных его строк?
Ответ:а) 8; б) 6; в) 4; г)12.

Тест по теме «Матрицы и системы линейных уравнений»

Вариант 1

1. Найти сумму элементов второй строки матрицы обратной к матрице А.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) -8; б) -7; в) -1; г) 2; д) 1; е) 13.

2. Найти численное значение выражения $x_1x_2 + x_3$, где (x_1, x_2, x_3) – решения системы линейных уравнений, заданных расширенной матрицей.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Ответ: а) 1/2; б) -3; в) 2; г) 0; д) 6; е) –3/2.

3. При каком значении α данная система, заданная расширенной матрицей, не будет совместной?

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & \alpha & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Ответ: а) -1; б) 0; в) 1; г) 3; д) 5; е) 6.

4. Найти произведение матриц и сумму элементов второй строки полученной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) 0; б) 10; в) 17; г) 22; д) 30; е) 33; ж) 6.

5. При каком значении α ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ меньше трех?

Ответ: а) 2/3; б) 3/2; в) 2; г) 3; д) 4; е) 8.

Тест. Комплексные числа.

Вариант 1

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-6}$ и подсчитать их сумму.
   Ответ: а) 3/2; б) $\sqrt[4]{3/2}$; в) 1/2; г) 0; д) –1; е) i; ж) $2\sqrt[4]{24}$.

2. Произвести действие над комплексными числами в алгебраической форме
$$\frac{(2i-1)(2-i)}{1+2i}.$$
   Ответ: а) 3i; б) 2-i; в) 2+i; г) -2-i; д) 2i; е) –2+i.

3. Решить уравнение $z^2+9=0$.
   Ответ: а) ±(2-i); б) ±2i; в) ±(2+i); г) ±(3-2i); д) ±3i.

4. Извлечь корень $\sqrt{-1}$.
   Ответ: а) {±1}; б) {±i}; в) {±1,±i}; г) {1; 1/2±$i\sqrt{3/2}$ }.

5. Вычислить i^{160}.
   Ответ: а) 0; б) 1; в) -1; г) -i; д) i; е) 160.

Сводный тест за второй семестр

Вариант 1

1. Найти все значения корня $\sqrt[4]{-6}$ и подсчитать их сумму.

Ответ: а) 3/2; б) $\sqrt[4]{3/2}$; в) 1/2; г) 0; д) –1; е) i; ж) $2\sqrt[4]{24}$.

2. Произвести действие над комплексными числами в алгебраической форме $\frac{(2i-1)(2-i)}{1+2i}$.

Ответ: а) 3i; б) 2-i; в) 2+i; г) -2-i; д) 2i; е) –2+i.

3. Решить уравнение $z^2+9=0$. **Ответ:** а) ±(2-i); б) ±2i; в) ±(2+i); г) ±(3-2i); д) ±3i.
4. Извлечь корень $\sqrt{-1}$. **Ответ:** а) {±1}; б) {±i}; в) {±1,±i}; г) {1; 1/2±$i\sqrt{3/2}$ }.
5. Вычислить i^{160}. **Ответ:** а) 0; б) 1; в) -1; г) -i; д) i; е) 160.
6. Чему равен показатель кратности корня –2 для многочлена $f(x)=x^3+6x^2+12x+8$.

Ответ: а) 0; б) 2; в) 1; г) 4; д) 3; е) -1.

7. Найти многочлен d(x)=НОД(f(x), g(x)) (старший коэффициент d(x) должен быть равен 1) и значение d(x) при x=3, где $f(x)=(x^2+4)(x^2+1)(x^3-1),\ g(x)=(x^2-4)(x^2-1)(x^3+1)$.

Ответ: а) 1; б) 0; в) 3; г) 2; д) 4; е) 5, ж)7.

8. Найти рациональные корни многочлена $f(x)=2x^3+x^2+x$ и в ответе записать сумму квадратов корней, сложенную с единицей.

Ответ: а) 2; б) 4; в) 3; г) 1; д) 0; е) 5.

9. Какие из многочленов $f_1=2x^3+x^2+x-2$, $f_2=x^5-2x^3-4x-6$, $f_3=x^6-4x^3+4$, $f_4=x^4-81$ неприводимы в поле рациональных чисел?

Ответ: а) f_1, f_2, f_3; б) f_2, f_4; в) f_1, f_3; г) f_1, f_2; д) f_2, f_3.

10. Какие из данных рациональных дробей $A_1=\frac{1}{x^2-1}$, $A_2=\frac{3}{x^3-17}$, $A_3=\frac{4x-1}{x^2+x+4}$, $A_4=\frac{5x+1}{x^4}$ являются простейшими в поле действительных чисел?

Ответ: а) A_1, A_2, A_3; б) A_1, A_2; в) A_1, A_3, A_4; г) A_3; д) A_3, A_4.

11. Найти сумму кубов корней многочлена $f(x)=2x^3+x^2+x$.

Ответ: а) 2; б) 5/8; в) -7/8; г) - 4; д) -2; е) 5/4.

12. Какая из заданных матриц является матрицей квадратичной формы $f=x_1^2-4x_2^2+x_1x_2-4x_2x_3+x_3^2$?

   Ответ: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4.

13. $A_1=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-4&-4\\0&-4&1\end{pmatrix}$; $A_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&4&4\\0&4&1\end{pmatrix}$; $A_3=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\1/2&-4&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$; $A_4=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\0&-4&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$.

14. Какие из квадратичных форм $f_1=x_1^2-4x_2^2+x_3^2$, $f_2=-x_1^2+x_2^2+8x_3^2$, $f_3=x_1^2+x_3^2$, $f_4=4x_1^2-x_2^2$ эквивалентны? **Ответ:** а) f_1, f_3; б) f_2, f_3; в) f_3, f_4; г) f_2, f_4; д) f_1, f_2; е) f_1, f_3, f_4.

15. Какие из квадратичных форм $f_1=x_1^2+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$, $f_2=x_1^2+2x_2^2$, $f_3=4x_1^2-x_2x_3$, $f_4=4x_1^2-x_2^2$ являются положительно определенными?

16. **Ответ:** а) f_1, f_2; б) f_1, f_3; в) f_3, f_4; г) f_1; д) f_2.

Сводный тест за III семестр

Вариант 1

Даны векторы $a_1=(1,2,1,0,0), a_2=(0,1,1,0,0), a_3=(0,0,1,1,1), b_1=(1,0,1,0,1), b_2=(0,1,0,1,0)$.

Задание 1. Найти размерность пространства натянутого на эти векторы.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 2. Найти размерность пересечения пространств L_1 и L_2 натянутых на системы векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 соответственно.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 3. При каком значении параметра p пространство решений однородной системы уравнений, заданной основной матрицей $\begin{pmatrix}p&p&1\\1&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ имеет наивысшую размерность?

Ответ: а) -8; б) $-\frac{3}{2}$; в) -1; г) $-\frac{7}{8}$; д) 1; е) 2.

Задание 4. Найти размерность ортогонального дополнения пространства решений данной системы

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5+2x_6=0\\ x_1+x_2+x_3+2x_4+2x_5+2x_6=0\\ 2x_1+x_2+3x_3=0\\ x_2+x_5=0\end{cases}.$$

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 5. Найти сумму элементов первой строки матрицы преобразования, переводящего векторы $a_1=(1,2), a_2=(2,3)$ в векторы $b_1=(1,2), b_2=(0,3)$ соответственно.

Ответ: а) -12; б) -8; в) -3; г) 0; д) 3; е) 15.

Задание 6. Определить размерность ядра линейного преобразования, заданного матрицей $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 7. Найти координаты вектора $x=(3,1)$ в базисе $e_1=(1,1), e_2=(-1,1)$.

Ответ: а) (2,-1); б) (2,-3); в) (1,1); г) (1,-2); д) (5,1); е) (2,3).

Задание 8. Выяснить, какие из следующих преобразований являются линейными

$$[x\varphi_1]=[x_1,-2x_2,3x_3],[x\varphi_2]=[x_1^2,(x_2+x_3)^2,-x_3],[x\varphi_3]=[x_1+1,x_2,x_3].$$

Ответ: а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Какие из линейных преобразований

$[x\varphi_1]=\left[\frac{x_1}{\sqrt{2}}-\frac{x_2}{\sqrt{2}},\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}},x_3\right],[x\varphi_2]=[x_1-x_2,x_1+x_2,x_3],$

$[x\varphi_1]=\left[\frac{x_1}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}},\frac{x_1}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}}-\frac{x_2}{\sqrt{3}},x_3\right],$

являются:

Задание 9. Ортогональными

Ответ:а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Задание 10. Симметрическими

Ответ:а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Задание 11. С помощью каких из формул

$$F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=5x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_2,F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1^2+y_1^2+x_2y_2,$$
$$F_3(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2$$

в двумерном действительном евклидовом пространстве можно задать скалярное произведение

Ответ:а) ни одной; б) F_1; в) F_2; г) F_3; д) F_1 и F_2; е) F_1 и F_3.

Задание 12. Перейти от базиса $a_1=(2,1),a_2=(1,1)$ к ортогональному базису b_1,b_2, приняв $b_1=a_1,b_2=\alpha b_1+a_2$. В ответе указать значение α.

Ответ:а) $-\frac{7}{5}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{5}$; г) $\frac{3}{5}$; д) $\frac{1}{5}$; е) $\frac{1}{2}$.

Линейное преобразование задано матрицей $\begin{pmatrix}3&2&1\\0&2&0\\0&2&1\end{pmatrix}$.

Задание 13. Определить собственное значение преобразования, которому соответствует собственный вектор (0,2,0).

Ответ:а) -2; б) 0; в) 1; г) 2; д) 3; е) 4.

Задание 14. Найти сумму собственных значений данного преобразования.

Ответ:а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7; е) 9.

Задание 15. Привести квадратичную форму $5x_1^2-6x_1x_2-5x_2^2$ к главным осям и найти сумму коэффициентов найденного канонического вида.

Ответ:а) -5; б) 0; в) 3; г) 6; д) 7; е) 9.

Тексты контрольных работ по проверке остаточных знаний

Тема: Контрольная работа по остаточным знаниям за II семестр.

Вариант 1.

1. Определить четность подстановки тремя способами $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&1&2\end{pmatrix}$.
2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}-1&0&1&-1\\0&-1&0&1\\1&1&1&1\\-1&-1&1&1\end{vmatrix}$.
3. Установить, что система имеет единственное решение. Решить систему двумя способами: с помощью правила Крамера и методом Гаусса: $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=6\\x_1+x_3=1\\x_2+x_3=2\end{cases}$

4. Решить систему (найти общее решение и фундаментальную систему решений): $\begin{cases} -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$.
5. Решить матричное уравнение XA=B: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Доказать, что следующая система векторов линейно зависима (-1, 2, -1, 1, 0), (2, 1, 1, 2, 0), (1, 0, 0, 0, -1), (0, 7, -2, 5, -1). Найти коэффициенты нетривиальной комбинации данных векторов равной 0.

Тема: Контрольная работа по остаточным знаниям за III семестр.

1. Найти координаты вектора x в базе b_1=(1,2,3), b_2=(1,0,1), b_3=(0,2,3), если в базе e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1) вектор x имеет координаты (2,2,3).
2. Найти базу ортогонального дополнения ядра и базу области значений линейного преобразования евклидова пространства, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Найти ортонормированный базис пространства решений системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.
4. Найти матрицу преобразования $\varphi\psi$ в базе b, b_2, если преобразование φ в базе a_1, a_2 имеет матрицу A_φ, а преобразование ψ в базе b_1, b_2 имеет матрицу B_ψ. a_1=(1,1), a_2=(1,0), b_1=(2,1), b_2=(3,2), $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Найти, если она существует, диагональную матрицу B, к которой приводится данная матрица A с помощью ортогонального преобразования. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
6. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x=(2,2,1) относительно ядра линейного преобразования евклидова пространства, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6.3. Вопросы диктантов

Тема: Перестановки и подстановки.

1. Что такое перестановка из n символов?
2. Теорема о числе различных перестановок из n символов.
3. Сколько существует различных перестановок из семи символов?
4. Что такое инверсия?
5. Что такое транспозиция (если речь идет о перестановках)?
6. Сколько существует четных (нечетных) перестановок из девяти символов?
7. Теорема о расположении всех перестановок из n символов.
8. Что такое подстановка n-й степени?
9. Сколько существует различных подстановок пятой степени?
10. Сколько существует четных (нечетных) подстановок шестой степени?
11. Что такое транспозиция (если речь идет о подстановках)?
12. Что мы называем умножением подстановок?
13. Теорема о произведении k транспозиций.

14. Как можно разложить в произведение транспозиций цикл длины k?
15. Что такое декремент?
16. Какова зависимость четности подстановки от декремента?
17. Что такое подстановка, обратная данной?
18. Удовлетворяет ли умножение подстановок законам коммутативности, ассоциативности?

Тема: Определители.

1. Что называется определителем матрицы n-го порядка?
2. Какие существуют правила вычисления определителей n-го порядка?
3. Свойства определителя, когда он равен нулю.
4. Другие свойства определителя.
5. Что называется алгебраическим дополнением минора r–порядка?
6. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
7. Теорема о разложении определителя по i–строке.
8. Теорема Лапласа. Следствие.
9. Определитель Вандермонда.
10. Метод рекуррентных соотношений: а) $\alpha=\beta$; б) $\alpha\neq\beta$;
11. При каком значении i и j произведение:
    1) $a_{13}a_{2i}a_{3j}a_{42}a_{55}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "+";
    2) $a_{13}a_{2i}a_{31}a_{4j}a_{52}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "–";
    3) $a_{12}a_{2i}a_{31}a_{43}a_{5j}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "+";
    4) $a_{14}a_{25}a_{3i}a_{4j}a_{53}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "–".
12. С каким знаком входит побочная диагональ в определитель:
    1) 102 порядка; 2) 97 порядка; 3) 202 порядка; 4) 192 порядка?
13. Разложить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ по 3 столбцу; 2) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ по 3 строке.

14. Найти алгебраическое дополнение минора, лежащего:
    1) в 2 и 4 строке, в 1 и 3 столбце; 2) в 1 и 3 строке, 2 и 4 столбце;
    в определителе

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тема: Матрицы и системы линейных уравнений.

1. Что называется матрицей, порядком матрицы?
2. Какое различие между матрицей и определителем?
3. Какие преобразования называются элементарными преобразованиями матрицы?
4. Какая матрица называется ступенчатой?
5. Теорема о том, что любую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью конечного числа элементарных преобразований (к.ч.э.п.) строк.
6. Действия над матрицами. Ассоциативность умножения матриц.
7. Что называется рангом матрицы?
8. Способы нахождения ранга матрицы.
9. Теорема о неизменности ранга матрицы при выполнении к.ч.э.п.
10. Теорема о ранге ступенчатой матрицы.

11. Дать определения совместной, несовместной систем линейных уравнений (СЛУ).
12. Дать определения определенной и неопределенной СЛУ.
13. Эквивалентные системы уравнений.
14. Какие неизвестные мы можем объявить главными?
15. Теорема Кронекера – Капелли.
16. Необходимое и достаточное условие, чтобы совместная система была определенной.
17. Основная теорема теории СЛУ.
18. Какая матрица называется обратной к данной? Какая матрица обладает обратной матрицей?
19. Способы нахождения обратных матриц.
20. Правило Крамера.
21. Ранг основной матрицы равен 4, система сама несовместна. Чему равен ранг расширенной матрицы?
22. Пусть ранг основной матрицы совместной системы с 7 неизвестными равен 3. Что можем сказать о количестве главных и свободных неизвестных?

Тема: Комплексные числа

1. Что такое мнимая единица?
2. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
4. Формулы сложения и вычитания комплексных чисел в алгебраической форме.
5. Формулы умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.
6. Формула умножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Чему равны $|\alpha\beta|$, $\arg(\alpha\beta)$?
7. Формула деления комплексных чисел в тригонометрической форме. Чему равны $|\alpha/\beta|$, $\arg(\alpha/\beta)$?
8. Как задается число, сопряженное с комплексным числом α:
   а) в алгебраической форме;
   б) в тригонометрической форме,
   где $\alpha=a+bi$?
9. Формула Муавра.
10. Формула вычисления корней n-й степени из комплексного числа.

Тема: Многочлены. Рациональные дроби. Квадратичные формы.

1. Определение НОД многочленов.
2. Определение кратного корня многочлена.
3. Теорема Безу и её следствие.
4. Следствия из алгоритма Евклида.
5. Алгоритм деления с остатком.
6. Теоремы о рациональных корнях целочисленных многочленов.
7. Следствия из основной теоремы алгебры для многочленов с комплексными коэффициентами.
8. Основная теорема теории симметрических многочленов.
9. Формулы Виета.
10. Критерий Эйзенштейна
11. Определение простейшей рациональной дроби.
12. Определения нормального и канонического вида квадратичной формы.
13. Определение положительно определенной квадратичной формы. Теорема.
14. Критерий Сильвестра.
15. Основная теорема теории квадратичных форм.
16. Закон инерции.
17. Какие из данных многочленов приводимы в поле действительных чисел $f_1(x) = x^2 + 5x + 10$, $f_2(x) = 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 21x + 12$, $f_3(x) = 2x^5 + 3x^4 - 7x^3 + 2$?

18.Какие из данных рациональных дробей являются простейшими над полем рациональных чисел $A_1 = \frac{x}{(x+1)^2}, A_2 = \frac{x^2}{(x^2-4)^3}, A_3 = \frac{2x+1}{x^2-2}$?

Тема: Векторные пространства

1. Аксиоматическое определение линейных пространств.
2. Примеры линейных пространств.
3. Может ли линейное пространство состоять из одного вектора?
4. Может ли линейное пространство состоять из двух разных векторов?
5. Определение изоморфных линейных пространств.
6. Примеры изоморфных линейных пространств.
7. Определение подпространства линейного пространства.
8. Несобственные подпространства.
9. Определение линейной оболочки, натянутой на систему векторов.
10. Определение линейного многообразия.
11. Является ли линейное многообразие подпространством линейного пространства?
12. Определение пересечение линейных подпространств.
13. Определение суммы линейных подпространств.
14. Определение прямой суммы линейных подпространств.
15. Что такое базис пространства?
16. Что такое размерность пространства?
17. Связь координат одного и того же вектора в разных базах.
18. Что такое матрица перехода от одного базиса к другому?
19. Теорема о размерности суммы двух подпространств.

Тема: Линейные преобразования и их матрицы

1. Определение линейного преобразования линейных пространств.
2. Что такое матрица линейного преобразования?
3. Какой вид имеет матрица линейного преобразования, если векторы отображаются сами в себя?
4. Как изменится матрица линейного преобразования, если в базисе переставить местами какие-нибудь два вектора?
5. Сумма линейных преобразований.
6. Произведение линейных преобразований.
7. Формула нахождения координат образа вектора при линейном преобразовании.
8. Определение области значений и ядра линейного преобразования.
9. Что такое дефект и ранг линейного преобразования?
10. Понятия образов и прообразов линейных пространств относительно преобразования.
11. Невырожденные линейные преобразования.
12. Определение инвариантных подпространств.
13. Примеры инвариантных подпространств.
14. Определение собственных векторов и собственных значений линейного преобразования.
15. Что такое спектр линейного преобразования?
16. В каких случаях матрица линейного преобразования имеет диагональный вид?

Тема: Евклидовы пространства.

1. Аксиоматическое определение евклидова пространства.
2. Неравенство Коши - Буняковского.
3. Длина вектора и угол между векторами.
4. Нормирование вектора.
5. Определение ортогональной системы векторов.
6. Процесс ортогонализации.

7. Определение ортонормированной системы векторов.
8. Определение ортогонального дополнения.
9. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства.
10. Определение изоморфных евклидовых пространств.
11. Определение ортогональных матриц.
12. Свойства ортогональных матриц.
13. Определение ортогональных преобразований евклидовых пространств.
14. Свойства ортогональных преобразований.
15. Определение симметрических преобразований евклидовых пространств.
16. Свойства симметрических преобразований.

6.4. Экзаменационные вопросы

I семестр

1. Перестановки. Теорема о числе различных перестановок.
2. Транспозиция в перестановке. Теорема о расположении всех перестановок из n символов.
3. Четность, нечетность перестановки. Теорема о транспозиции в перестановках.
4. Подстановки. Транспозиция в подстановках. Четность, нечетность подстановок. Теорема о разложении подстановки в произведении транспозиций.
5. Разложение подстановок в произведении независимых циклов. Утверждения о циклических подстановках.
6. Декремент. Теорема о декременте.
7. Определитель n-го порядка и его свойства.
8. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
9. Миноры и их алгебраические дополнение. Теорема о разложении определителя по элементам некоторой строки.
10. Теорема Лапласа и ее следствие.
11. Вычисление определителей методом рекуррентных соотношений ($\alpha \neq \beta$).
12. Вычисление определителей методом рекуррентных соотношений ($\alpha = \beta$).
13. Матрицы и их элементарные преобразования. Ступенчатая матрица. Теорема о том, что каждую матрицу конечным числом элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.
14. Теорема о том, что если от матрицы A к матрице B можно перейти к.ч.э.п. строк, то и от B к A можно перейти к.ч.э.п. строк.
15. Теорема о неизменности ранга матрицы при элементарных преобразованиях.
16. Ранг матрицы. Теорема о ранге ступенчатой матрицы.
17. Теорема о неизменности ранга матрицы при транспонировании.
18. Эквивалентные системы линейных уравнений. Теорема о том, что если от расширенной матрицы одной системы можно перейти к расширенной матрице другой системы с помощью конечного числа элементарных преобразований строк, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.
19. Исследование ступенчатых систем линейных уравнений (2 случая). Главные и свободные неизвестные. Общей решение СЛУ.
20. Теорема Кронекера-Капелли.
21. Необходимое и достаточное условие определенности совместной системы от n неизвестных Следствие.
22. Теорема о существовании ненулевого решения СЛОУ.
23. Основная теорема теории систем линейных уравнений.
24. Свойства решений СЛОУ. Фундаментальная система решений СЛОУ.
25. Связь между решениями неоднородных и приведенных систем линейных уравнений.
26. Правило Крамера.

27. Действия над матрицами. Свойства действий над матрицами.
28. Ассоциативность умножения матриц.
29. (AB)’=B’A’.
30. Диагональные матрицы, умножение произвольной матрицы на диагональную.
31. Связь элементарных преобразований над матрицами с умножением на элементарные матрицы.
32. Теорема о ранге произведения матриц.
33. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
34. Теорема об определителе произведения матриц.
35. Поле комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
36. Вывод формулы извлечения корня 2-ой степени из комплексного числа в алгебраической форме.
37. Вывод формулы умножения комплексных чисел в тригонометрической форме.
38. Вывод формулы деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
39. Формула Муавра. Вывод формулы Муавра.
40. Вывод формулы извлечения корня n-ой степени из комплексного числа.
41. Корни n-ой степени из единицы. Теоремы о корнях n-ой степени из единицы.
42. Первообразные корни n-ой степени из единицы. 2 теоремы о первообразных корнях.

III семестр

1. Аксиоматическое определение линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств. Свойства изоморфного отображения.
2. Теорема о том, что каждый вектор пространства единственным образом представляется как линейная комбинация векторов базиса.
3. Основная теорема об изоморфизме. Следствия.
4. Невырожденность матрицы перехода. Связь координат одного и того же вектора в разных базах.
5. Подпространства линейных пространств. Теорема.
6. Пересечение и сумма линейных подпространств. Теорема.
7. Теорема о размерности суммы двух подпространств.
8. Теоремы о прямых суммах подпространств.
9. Аксиоматическое определение евклидова пространства. Теорема о превращении любого линейного пространства в евклидово.
10. Длина вектора и угол между векторами. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
11. Неравенство Коши - Буняковского.
12. Необходимое и достаточное условие вырожденности матрицы Грамма.
13. Теорема о том, что всякое евклидово пространство обладает ортогональными базами.
14. Теорема о том, что всякая ортогональная система ненулевых векторов является линейно независимой.
15. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации.
16. Ортонормированная система векторов. Теорема о том, что всякое евклидово пространство обладает ортонормированными базами.
17. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы база евклидова пространства была ортонормированной.
18. Теорема о координатах вектора в ортонормированном базисе.
19. Ортогональное дополнение. Теорема о представлении евклидова пространства в виде прямой суммы подпространства L и его ортогонального дополнения.
20. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства.
21. Изоморфизм евклидовых пространств. Теорема.
22. Линейные преобразования линейных пространств. Действия над линейными преобразованиями.

23. Матрица линейного преобразования. Формула нахождения координат образа вектора при линейном преобразовании.
24. Связь между матрицами линейного преобразования в разных базах.
25. Теорема о существовании и единственности линейного преобразования, переводящего линейно независимые векторы в произвольные.
26. Область значений и ядро линейного преобразования. Теоремы об их размерностях.
27. Теорема о том, что образы и прообразы линейных пространств опять являются линейными пространствами.
28. Неособенные линейные преобразования. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное преобразование было неособенным.
29. Ранг линейного преобразования. Теорема о ранге произвольного линейного преобразования.
30. Инвариантные подпространства. Теорема о том, что ядро и область значений линейного преобразования являются инвариантными подпространствами относительно любого линейного преобразования.
31. Теорема о прямой сумме инвариантных подпространств.
32. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Теорема о том, что собственными значениями линейного преобразования служат действительные характеристические корни линейного преобразования, и только они.
33. Спектр. Теорема о матрице линейного преобразования в базе, состоящей из собственных векторов.
34. Простой спектр. Диагональный вид матрицы линейного преобразования с простым спектром.
35. Теорема о том, что характеристический многочлен любого линейного преобразования не зависит от выбора базиса.
36. Ортогональные матрицы. Свойства ортогональных матриц.
37. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы матрица была ортогональной.
38. Теорема о матрице перехода от ортонормированной базы евклидова пространства к любой другой его ортонормированной базе.
39. Ортогональные преобразования евклидовых пространств. Утверждения о них.
40. Свойства ортогональных преобразований.
41. Симметрические преобразования и их свойства.
42. Утверждения о симметрических преобразованиях.
43. Теорема о характеристических корнях симметрического преобразования.
44. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейное преобразование евклидова пространства было симметрическим.
45. Приведение квадратичных форм к главным осям. Теорема о существовании ортогональной матрицы, приводящей симметрическую матрицу к диагональному виду.
46. Теорема о приведении действительной квадратичной формы к главным осям.
47. Теорема о коэффициентах канонического вида квадратичной формы, к которому она приводится с помощью ортогонального преобразования.
48. Теорема о собственных векторах симметрического преобразования, относящихся к различным собственным значениям.
49. Пары форм. Теорема о существовании невырожденного линейного преобразования, одновременно приводящего действительную положительно определенную квадратичную форму g к нормальному виду и произвольную действительную форму f – к каноническому.
50. Множества. Операции над множествами и их свойства.
51. Отображения. Виды отображений. Сюрьективные, иньективные, биективные отображения.
52. Понятие алгебраической операции (бинарной, n-арной).
53. Универсальная алгебра. Группоиды, полугруппы, квазигруппы, лупы. Примеры универсальных алгебр.
54. Группы и их подгруппы.
55. Изоморфизм групп. Построение группы подстановок изоморфной данной.
56. Гомоморфизм алгебр. Теоремы о гомоморфизме алгебр. Пример гомоморфных алгебр.

57. Смежные классы и их свойства. Разложение группы на смежные классы по подгруппе.
58. Теорема Лагранжа и ее следствия.
59. Нормальные делители группы, фактор – группы.

7. Учебно-методическое обеспечение дисциплины

7.1. Основная литература

№	Авторы	Наименование	Изд., год изд.	Назначение	Кол-во в библ-ке
1.001	Кострикин А.И.	Введение в алгебру. Часть 1.	М.: Физико-математическая литература, 2004	Учебник	13
1.002	Кострикин А.И	Введение в алгебру. Часть 3.	М.: Физико-математическая литература, 2004	Учебник	13
1.003	Курош А.Г.	Курс высшей алгебры	М.: Наука, 1975, 2004, 2005	Учебник	165
1.004	Мальцев А.И.	Основы линейной алгебры	М.: Наука, 1975	Учебник	15
1.005	Петрова В.Т.	Лекции по алгебре и геометрии. Части 1 и 2	М.: Владос, 1999.	Учебник	15
1.006	Фаддеев Д.К.	Лекции по алгебре	СПб.: Издательство "Лань", 2002.	Учебное пособие	15
1.007	Проскуряков И.В.	Сборник задач по линейной алгебре	М.: Наука,2005	Учебник	45
1.008	Скорняков Л.Я.	Элементы алгебры	М.: Наука, 1986.	Учебник	

7.2. Дополнительная литература

	Автор(ы)	Наименование	Издательство, год издания	Назначение	Кол-во в библиотеке
2.001	Каргополов М.И. , Мерзляков Ю.И.	Основы теории групп.	М., 1982	Учебник	5
2.002	Кострикин А.И.	Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра	М.: Физико-математическая литература, 2004	Учебник	13
2.003	Куликов Л.Я.	Алгебра и теория чисел	М.: Высшая школа, 1979.	Учебник	
2.004	Курош А.Г.	Теория групп.	М.: Наука, 1967.	Учебник	2
2.005	Ляпин Е.С., Евсеев А.Е.	Алгебра и теория чисел. Ч II. Линейная алгебра и полиномы.	М.: Просвещение, 1979.	Учебник	
2.006	Окунев Л.Я.	Высшая алгебра.	М.: Просвещение, 1966	Учебник	
2.007	Табачников С.Л.	Многочлены.	М.: Фазис, 2000.	Учебник	
2.008	Фрид Э.	Элементарное введение в абстрактную алгебру	М., 1979	Учебник	
2.009	Глухов М.М., Солодовников А.С.	Задачник – практикум по высшей алгебре	М.: Просвещение, 1969.	Учебное пособие	
2.010	Гурзо Г.Г.	Индивидуальные задания по теме «Универсальные алгебры».	Якутск, 1991.	Методическое пособие	3
2.011	Гурзо Г.Г.	Лабораторные задания по теме «Линейные пространства».	Якутск, 1996.	Методическое пособие	4
2.012	Гурзо Г.Г., А.И. Антонен А.И.	Лабораторные задания по теме "Линейные преобразования линейных пространств".	Якутск, 1996.	Методическое пособие	70
2.013	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н.	Индивидуальные задания по теме: «Многочлены».	Якутск, 1994.	Методическое пособие	25
2.014	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н.	Лабораторные задания на тему: «Перестановки и подстановки»	www. sitim.sitc.ru/E-books/index.htm, 2002	Методические указания	
2.015	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н.	Лабораторные задания по теме "Матрицы и системы линейных уравнений"	Якутск, 1994.	Методические указания	
2.016	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н., Иванова А.О., Неустроева Т.К.	Методические указания и контрольные задания по алгебре и теории чисел.	www. sitim.sitc.ru/E-books/index.htm, 2002	Методические указания	
2.017	Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н., Иванова А.О., Неустроева Т.К.	Определители	www. sitim.sitc.ru/	Методические указания	
2.018	Гурзо Г.Г., Иванова А.О.	Комплексные числа	www. sitim.sitc.ru, 2002	Методические указания	

2.019	Гурзо Г.Г., Скрябин А.В.	Квадратичные и билинейные формы	Якутск, 1997.	Методические указания	32
2.020	Гурзо Г.Г., Скрябин А.В.	Лабораторные задания по теме «Евклидовы пространства».	Якутск, 1996.	Методическое пособие	36
2.021	Дмитриев И.Г., Бочарова И.Н., Неустроева Т.К.	Дистанционный курс "Алгебра".	www. sitim.sitc.ru/E-books/index.htm, 2001	Электронный учебник	

Календарно-тематический план

с отражением СРС на 2010-2011 уч. год

I семестр

№	ТЕМЫ	л.з.	и.з.
1-4	Перестановки и подстановки	8	2
5	С/р по теме "Перестановки и подстановки"	2	
6-7	Определители 1-го и 2-го порядка. Их вычисление и применение. Определители n-го порядка и их свойства. Миноры и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Теорема Лапласа. Правило Крамера.	4	2
8-9	Методы вычисления определителя n-го порядка. Определитель Вандермонда.	4	
10	К/р	2	
11-13	Поле комплексных чисел. Геометрическое представление комплексных чисел и операции над ними. Тригонометрическая форма комплексного числа. Корни из комплексного числа.	6	2
14	К/р	2	
15-16	Универсальные алгебры.	4	2
17-20	Матрицы. операции над матрицами и их свойства. Элементарные матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц. Обратимые матрицы. условие обратимости матрицы. вычисление обратной матрицы (2 метода). Решение матричных уравнений.	8	2
21	К/р	2	
22-25	Системы линейных уравнений и элементарные преобразования. Метод Гаусса. ОТТСЛУ. Системы однородных, неоднородных линейных уравнений. Критерий совместности линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.	8	2
26	К/р	2	
27	Сводная к/р	2	

Календарно-тематический план

с отражением СРС на 2010-2011 уч. год

II семестр

№	ТЕМЫ	лекции
1-2	Понятие n-мерного векторного пространства. Линейная зависимость системы векторов. Базис и ранг системы векторов.	4ч
3	Аксиоматическое определение линейного пространства, базис и размерность пространства. Изоморфизм линейных пространств.	2ч
4	Подпространства линейных пространств. Линейное многообразие. Линейная оболочка множества векторов.	2ч
5	Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств.	2ч
6-7	Линейные преобразования линейных пространств. Матрица линейного преобразования. Связь между матрицами линейного преобразования в разных базах. Теорема о том, что существует единственное линейное преобразование переводящее линейно независимые векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в произвольные векторы $b_1, b_2, \ldots, b_n$ соответственно. Действия над линейными преобразованиями.	4ч
8	Ядро и область значений линейного преобразования. Теорема о том, что образы и прообразы линейных пространств опять являются линейными пространствами. Теорема о том, что сумма ранга и дефекта линейного преобразования равна размерности пространства. Теорема о ранге произвольного линейного преобразования.	2ч
9-10	Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Линейные преобразования с простым спектром. Достаточные условия приводимости матрицы линейного преобразования к диагональному виду. Спектр линейного преобразования. Линейные преобразования с простым спектром.	4ч
11	Унитарные и Евклидовы пространства.	2ч
12	Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса, процесс ортогонализации. Теорема о том, что всякая ортогональная система векторов является линейно независимой.	2ч
13	Ортогональное дополнение к подпространству. Теорема о представлении евклидова пространства в виде прямой суммы подпространства L и его ортогонального дополнения. Норма вектора. Ортонормированный базис евклидова пространства.	2ч
14	Изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности.	2ч
15-17	Ортогональные матрицы и их свойства. Ортогональные преобразования евклидовых пространств, симметрические преобразования евклидовых пространств и их свойства.	6ч
18	Приведение квадратичных форм к главным осям. Пары форм.	2ч

Календарно-тематический план

с отражением СРС на 2010-2011 уч. год

III семестр

№	ТЕМА	Часы	Дата
1	Определения группы. Их равносильность. Примеры. Порядок группы.	2	
2	Отображения групп. Изоморфизм групп. Примеры.	2	
3	Возведение в целую степень элементов группы. Порядок элемента. Утверждения о нем. Понятие подгруппы. Критерий определения подгрупп. Примеры.	2	
4	Теорема Кэли. Таблица Кэли для групп. Свойства расположения элементов группы в таблице Кэли. Примеры.	2	
5	Циклические подгруппы и группы. Теорема о подгруппах циклических групп. Примеры.	2	
6	Смежные классы по подгруппе. Свойства. Индекс подгруппы в группе.	2	
7	Инвариантные подгруппы. Фактор-группа по инвариантной подгруппе. Примеры. Классы сопряженных элементов. Свойства.	2	
8	Гомоморфизмы групп. Свойства гомоморфизма. Теорема о ядре гомоморфизма. Гомоморфизм группы на фактор-группу. Теорема о гомоморфизмах.	2	
9	Нормализатор элемента. Теорема о порядке класса сопряженности. Центр группы. Свойства. Примеры.	2	
10	Коммутатор пары элементов и его свойства. Строение коммутанта. Инвариантность коммутанта. Утверждение о коммутанте абелевых групп. Примеры.	2	
11	Теорема Галуа о простоте группы A_5. Следствия. Неразрешимые группы и неразрешимость уравнения в радикалах.	2	
12	Декартово произведение групп. Утверждения о них. Критерий разложимости группы в произведение групп меньшего порядка.	2	
13	Конечные абелевы группы. Примеры.	2	
14	Теорема о цикличности или разложимости абелевых р-групп. Основная теорема об абелевых группах.	2	
15	Группы симметрий правильных многогранников	2	
	ВСЕГО	**32**	

Перечень методических разработок по СРС

1. Конспект лекций, электронная книга, опубликована на yktmath.narod.ru/ysu

2. Индивидуальные задания по алгебре для СРС, электронная книга, опубликована на yktmath.narod.ru/ysu

График консультаций

Каждый четверг, после 14.00 на кафедре.

Консультации проводятся по темам:

Универсальные алгебры. СРС, 8 час

Ядро и область значений линейного преобразования. СРС, 8 час

Гомоморфизмы групп. СРС, 8 час

Неразрешимые группы и неразрешимость уравнения в радикалах. СРС, 8 час

Группы симметрий правильных многогранников. СРС, 8 час

Анализ равномерности

СРС распределены равномерно

Анализ соответствия

Часы СРС соответствуют часам рабочей программы

Шамаев Э.И.

Конспект лекций по курсу «Геометрия и алгебра»

Алгебра

Якутск, 2009

1 Системы линейных уравнений

1.1 Что такое с.л.у.?

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — некоторые действительные числа; x_1, x_2, …, x_n — некоторые символы. Тогда для каждого натурального n выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

называется линейным уравнением. Символы x_1, x_2, …, x_n мы будем называть переменными или неизвестными.

Рассмотрим m линейных уравнений, которые нужно решить одновременно:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{1}$$

Определение 1 *Выражение (1) называется системой m линейных уравнений с n неизвестными. Набор из n чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется решением с.л.у., если при подстановке этого набора в с.л.у. вместо неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ все уравнения станут верными равенствами. Множество всех решений с.л.у. называется множеством решений с.л.у. Если с.л.у. имеет хотя бы одно решение, то с.л.у. называется совместной, иначе с.л.у. называется несовместной. Множество решений несовместной с.л.у. называется пустым.*

Совместная система называется определенной, если множество решений с.л.у. имеет единственное решение, и неопределенной, если множество решений с.л.у. имеет бесконечно много решений.

Если множества решений систем линейных уравнений совпадают, то эти с.л.у. называются эквивалентными.

Далее вместо (1) будем писать следующее выражение для краткости.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2}$$

Можно сказать, что весь семестр мы будем исследовать с.л.у. Вопросы, которые нас интересуют: *как находить решения с.л.у.?* и *когда с.л.у. разрешима?*.

Чтобы ответить на этот вопрос мы введем понятия матрицы, определителя матрицы, векторного пространства, векторного подпространства, линейной зависимости, размерности, фундаментальной системы решений и т.д.

Для решения с.л.у. часто используют *методы исключения неизвестных* или *метод Гаусса.* В этих методах шаг за шагом выражают неизвестную через другие и исключают из системы уравнений.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Является ли несовместная с.л.у. эквивалентной уравнению $x_1^2 = -1$?

2. Как измениться (2), если второе уравнение умножить на 2?

3. Как измениться (2), если первое и второе уравнения поменять местами?

4. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right).$$

1.2 Как решать с.л.у.? — метод Гаусса

1.2.1 Элементарные преобразования

Ознакомимся с тремя элементарными преобразованиями с.л.у., с помощью которых мы сможем упростить любую с.л.у. до очевидного вида.

Лемма 1 (1-е элементарное преобразование) *При перестановке местами уравнений с.л.у. останется эквивалентной прежней.*

◀ Пусть A — множество решений старой с.л.у., B — новой с.л.у. Ясно, что $A \subseteq B$ и также очевидно $A \supseteq B$. Тогда $A = B$ ▶

Аналогичное доказательство имеет следующая лемма

Лемма 2 (2-е элементарное преобразование) *При умножении уравнения на ненулевое число с.л.у. останется эквивалентной прежней.*

Более содержательным является последняя лемма об элементарных преобразованиях

Лемма 3 (3-е элементарное преобразование) *Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ следующие с.л.у. эквивалентны*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{ln} & b_l \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1}+\lambda a_{l1} & a_{k2}+\lambda a_{l2} & \ldots & a_{kn}+\lambda a_{ln} & b_k+\lambda b_l \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{l1} & a_{l2} & \ldots & a_{ln} & b_l \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (3)$$

◀ Пусть A — множество решений первой с.л.у., B — второй с.л.у.

Рассмотрим произвольную $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in A$. При подстановке этого набора чисел во вторую с.л.у. для всех строках, кроме k-й, равенства очевидно верны. Рассмотрим левую часть k-го равенства. После перегруппировки слагаемых это выражение равно $(a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \ldots + a_{kn}x_n^0) + \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна b_k, вторая b_l. Следовательно, все это выражение равно $b_k + \lambda b_l$. Таким образом, k-ое выражение второй с.л.у. является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in B$. Это означает, что $A \subseteq B$.

Рассмотрим произвольную $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in B$. При подстановке этого набора чисел в первую с.л.у. равенство k-й пока не очевидно. Рассмотрим левую часть этого равенства. После перегруппировки слагаемых рассматриваемое выражение равно $\big[(a_{k1}+\lambda a_{l1})x_1^0 + (a_{k2}+\lambda a_{l2})x_2^0 + \ldots +$

$(a_{kn}+\lambda a_{ln})x_n^0\big] - \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна $b_k + \lambda b_l$, вторая b_l. Следовательно, все это выражение равно b_k. Таким образом, k-ое выражение первой с.л.у. является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in A$. Это означает, что $B \subseteq A$.

Итого, из $A \subseteq B$ и $A \supseteq B$ следует $A = B$ — эквивалентность этих с.л.у. ►

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right). \tag{4}$$

2. Можно ли элем. преобр-ми избавится от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме одной?

3. Можно ли элементарными преобразованиями несовместной с.л.у. получить совместную?

4. Можно ли применять элементарные преобразования к столбцам с.л.у.?

1.2.2 Описание метода Гаусса решения систем уравнений

Рассмотрим с.л.у. из m уравнений и n переменных.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{5}$$

1) Прямой ход метода Гаусса.

а) Среди коэффициентов первого столбца имеется ненулевой, иначе переменная x_1 отсутствует в с.л.у. и x_1 может принимать любое значение. Такие переменные называются *свободными переменными.*

б) Выберем среди коэффициентов первого столбца ненулевой a_{k1} и назовем *ведущим.*

в) Поменяем 1-ю и k-ю строки местами. Выпишем полученную с.л.у.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right). \tag{6}$$

г) Из каждой i-ой строки ниже ведущего элемента вычтем 1-ю строку, умножив на a'_{i1}/a'_{11}.

Таким образом, мы избавимся от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме первого уравнения. Далее решаем систему линейных уравнений без первого уравнения и столбца.

Продолжая прямой ход Гаусса, в конце получим с.л.у. *ступенчатого вида.*

$$1^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) \end{array}, \quad 2^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \end{array}, \quad 3^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

В случае 1° свободная переменная — x_4; в 2° свободная переменная — x_3; в 3° свободные переменные — x_3 и x_4.

2) Обратный ход метода Гаусса.

Если одно из уравнений имеет вид $(0\ 0\ 0\ \dots\ 0 \mid c\ )$, где $c \neq 0$, то это уравнение $0 = c$ не имеет решения. Тогда не имеет решение и с.л.у. Иначе с.л.у. совместна и множество ее решений найдем после обратного хода Гаусса.

Пусть имеется k нетривиальных уравнений в ступенчатом виде с.л.у. Пусть переменные, не являющиеся свободными, имеют индексы $i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_k$.

а) Из самого нижнего уравнения мы выразим x_{i_k} через b_{i_k} и свободные переменные.

Теперь при рассмотрении $(k-1)$-го уравнения x_{i_k} можно заменить через число и свободные переменные.

Продолжая это действие, мы выразим все переменные $x_{i_1},\ x_{i_2},\ \dots,\ x_{i_k}$ через свободные переменные и некоторые числа.

При любых значениях свободных переменных мы будем получать новое решение с.л.у.

С.л.у. имеет единственное решение, если она совместна и не имеет свободных переменных.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right). \tag{7}$$

2. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 29 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 22 \end{array}\right).$$

1.3 Когда с.л.у. имеет единственное решение?

1.3.1 Определитель матрицы 1×1

Приведем очевидные утверждения.

Теорема 1 (Критерий существования единственного решения) *Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственное решение.*

Теорема 2 (Вырожденный случай) *Если $a = 0$, то уравнение $ax = b$, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.*

1.3.2 Определитель матрицы 2×2

Рассмотрим систему линейных уравнений из двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{8}$$

Считаем, что каждое из уравнений имеет хотя бы одну переменную, т.е. хотя бы один из коэффициентов a_{11} и a_{12} не равен нулю, и хотя бы один из коэффициентов a_{21} и a_{22} не равен нулю. Тогда каждое из уравнений задает прямую на плоскости с координатами x и y.

Рассмотрим случай $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x + \dfrac{b_1}{a_{12}}; \\ y = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x + \dfrac{b_2}{a_{22}}. \end{cases} \tag{9}$$

Если угловые коэффициенты $-\dfrac{a_{11}}{a_{12}} \neq -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}$, то данные прямые не являются параллельными. Не параллельные прямые имеют единственное пересечение [1].

Параллельные прямые либо не имеют точки пересечения, либо совпадают и тогда с.л.у. имеет бесконечно много решений.

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем системы (8). Поскольку определитель зависит только от коэффициентов левой части с.л.у., то всегда пишут так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Из всех рассуждений мы делаем следующий вывод.

Теорема 3 (Критерий существования единственного решения) *Если определитель системы линейных уравнений из 2 уравнений с 2 неизвестными не равен нулю, то эта система имеет единственное решение.*

Иначе система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

◀ Таким образом, при $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$ критерием существования единственного решения является условие $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Другие возможные случаи: $a_{12} = 0$ и $a_{22} = 0$; $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} = 0$; $a_{12} = 0$ и $a_{22} \neq 0$.

В первом случае мы имеем прямые параллельные оси ординат и определитель равен нулю.

Во втором случае вторая прямая параллельна оси ординат, первая — нет. Тогда определитель не равен нулю и прямые не параллельны.

В третьем случае первая прямая параллельна оси ординат, вторая — нет. Тогда определитель не равен нулю и прямые не параллельны.

Таким образом, во всех случаях с.л.у. (8) имеет единственное решение только в случае $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ▶

1.4 Определитель матрицы $n \times n$

Для определения понятия определителя матриц $n \times n$ нам понадобится каждой строке поставить в соответствие столбец.

Определение 2 *Выпишем в таблицу номера строк и ниже номера столбцов:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

где $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \{1, 2, \dots n\}$. *Такие таблицы называются подстановками из* n *элементов. Далее будем считать, что* $\sigma 1 = t_1$, $\sigma 2 = t_2$, $\dots$, $\sigma n = t_n$.

Заметим, что номера столбцов (числа второй строки подстановки) не повторяются.

Пример подстановки: $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ — не подстановка.

Из определения следует, что $\mu 1 = 3$, $\mu 2 = 1$, $\mu 3 = 2$ и $\mu 4 = 4$.

Множество всех подстановок из n элементов обозначается через S_n.

Лемма 4 *Число всех подстановок степени* n *равно* $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$

◀ Построим произвольную подстановку n-ой степени. Выберем произвольный t_1. Это можно сделать n различными способами. Затем выберем t_2 из множества $\{1, 2, .., n\}$ без t_n. Этот выбор можно сделать $n-1$ способом. Продолжим процесс выбора элементов. При выборе последнего элемента t_n останется единственный вариант. Таким образом, число вариантов выбора подстановки равно $n \cdot (n-1) \cdot .. \cdot 2 \cdot 1$ ▶

Рассмотрим произвольную подстановку (3) из n элементов. Говорят, что числа t_k и t_m составляют *инверсию,* если $t_k < t_m$ и t_k стоит правее t_m. *Четностью подстановки* σ называют четность числа инверсий в нем.

Определим функцию знака подстановки

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ четная}, \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная}. \end{cases}$$

Определение 3 *Произведением подстановок*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

назовем следующую подстановку

$$\sigma\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_{t_1} & s_{t_2} & \dots & s_{t_n} \end{pmatrix}.$$

Лемма 5 *Для любых подстановок* σ *и* ρ *верно равенство*

$$sgn\, \sigma\rho = sgn\, \sigma\, sgn\, \rho.$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Определите четность подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

2. Найдите $\sigma 3$, $\rho 5$, $\mu 4$. **3.** Найдите произведения подстановок $\sigma\rho$ и $\mu\sigma$.

4. Найдите обратные подстановки σ^{-1}, ρ^{-1} и μ^{-1}.

5. Существует ли подстановка из четырех элементов без инверсий? Существует ли подстановка из пяти элементов с 10 инверсиями?

1.4.1 Первое определение

Определение 4 *Определителем матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется выражение

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma n},$$

где суммирование ведется по всевозможным подстановкам $\sigma \in S_n$.

Случай $n = 2$. Число подстановок равно по лемме 4 равно $2! = 2$. Выпишем все эти подстановки со знаками.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Случай $n = 3$. Число подстановок S_3 равно 6. Выпишем все эти подстановки со знаками

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

1.4.2 Второе определение

Определение 5 *Определителем квадратной матрицы A размером $n \times n$ называется сумма всевозможных правильных произведений, где правильным произведением называется произведение n элементов матрицы на разных строках и столбцах и знака подстановки индексов* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите определители матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 10 \\ 1 & \dots & 1 & 100 & 1 \\ 1 & \dots & 1000 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10^n & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

1.4.3 Свойства определителей

Транспонированной матрицей матрицы a_{ij} называют матрицу a_{ji}. Обозначается как A^T. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Свойство 1 *Для любой квадратной матрицы A выполнено*

$$\det A = \det A^T.$$

◀ Справедливы равенства

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{1\sigma 1} \dots a_{n \sigma n} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{\sigma^{-1} 1 1} \dots a_{\sigma^{-1} n n} = \det A^T.$$

Суммы равны, поскольку слагаемые равны (по лемме 5 верно $\operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma^{-1} = 1$) ▶

Свойство 2 *Если строка матрицы A состоит из нулей, то* $\det A = 0$.

Свойство 3 *При перестановке местами двух строк матрицы определитель меняет знак.*

◀ Пусть $\tau = (rs)$ транспозиция, меняющая местами элементы r и s. Понятно, что $\tau^{-1} S_n = \{\tau^{-1}\sigma | \sigma \in S_n\} = S_n$.

$$\det(b_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{11\sigma} .. a_{rr\sigma} .. a_{ss\sigma} .. a_{nn\sigma}$$

$$= \sum_{\tau\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \tau\sigma a_{11\tau\sigma} .. a_{rr\tau\sigma} .. a_{ss\tau\sigma} .. a_{nn\tau\sigma} = \sum_{\sigma \in \tau^{-1} S_n} -\operatorname{sgn} \sigma a_{11\sigma} .. a_{nn\sigma} = \det(a_{ij}).$$

Последнее равенство выполнено в силу выбора τ. ▶

Свойство 4 *Если матрица A содержит одинаковые строки, что* $\det A = 0$.

Свойство 5 *Если строку матрица A умножить на λ, то $\det A$ возрастет в λ раз.*

Свойство 6 *Если матрица A содержит пропорциональные строки, что* $\det A = 0$.

Свойство 7 *Пусть $A_i(v)$ — матрица, где с i-ая строка заполнена набором чисел v.*
Тогда $\det A_i(v) + \det A_i(w) = \det A_i(v + w)$.

◀ $\det(c_{ij}) =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .. c_{ss\sigma} .. c_{nn\sigma} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... (a_{ss\sigma} + b_{ss\sigma}) .. c_{nn\tau\sigma} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... a_{ss\sigma} .. \sigma c_{nn\sigma} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... b_{ss\sigma} .. c_{nn\sigma} =$$

$$\det(a_{ij}) + \det(b_{ij}).$$ ▶

Свойство 8 *Если одна из строк матрицы A является линейной комбинацией, то* $\det A = 0$.

Свойство 9 *Если строке матрицы A прибавить линейную комбинацию других строк, то определитель не изменится.*

Свойство 10

$$\det\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdot .. \cdot \lambda_n.$$

Замечание. Из первого свойства следует, что все эти утверждения справедливы и для столбцов.

Матрицу с нулевым определителем называют вырожденной.

Определение 6 *Выберем в матрице A по k произвольных строк и столбцов. Из элементов стоящих на пересечении этих строк и столбцов можно составить новую матрицу, которую называют подматрицей A. Определитель подматрицы A называется минором.*

Выбросим из матрицы A строку с номером i и столбцом j. Определитель полученной подматрицы называется минором элемента a_{ij}. Обозначается через M_{ij}. Выражение $(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением. Обозначается через A_{ij}.

Лемма 6 *Если матрица содержит строку, состоящую из единственного ненулевого элемента a_{ij}, то определитель этой матрицы равен произведению этого элемента и ее алгебраического дополнения. Другими словами, справедливо равенство*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{ij}A_{ij}. \tag{11}$$

◀ Последовательно меняем i-ую строку со всеми последующими строками и j-ый столбец со всеми последующими столбцами. По свойству 3 знак определителя изменится $n-i+n-j = 2n-(i+j)$ раз. Четность числа $2n-(i+j)$ совпадает с четностью $i+j$.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j}a_{ij}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Вынесем a_{ij} за пределы определителя по свойству 5.

Покажем, что полученная матрица имеет определитель равный M_{ij}. Введем преообозначение

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n-1} & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n-1,1} & \dots & a'_{n-1,n-1} & a'_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ — подстановка индексов произвольного ненулевого правильного произведения матрицы (13). Выпишем это произведение

$$\operatorname{sgn}\sigma a'_{1\sigma 1}\cdot a'_{2\sigma 2}\cdot\ldots\cdot a'_{n-1\sigma n-1}\cdot 1. \tag{14}$$

Ясно, что $\sigma n = n$.

Пусть $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix}$. Тогда число инверсий μ и σ совпадают. Следовательно, $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\mu$.

Теперь ясно, что слагаемое минора $\operatorname{sgn}\mu a'_{1\mu 1}\cdot a'_{2\mu 2}\cdot\ldots\cdot a'_{n-1\mu n-1}$ совпадает с (14).

Таким образом, (12) равен $a_{ij}A_{ij}$ ▶

Теорема 4 (Лапласа) *Определитель матрицы можно разложить по строке следующим образом:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \ \textit{для любой строки } i,$$

или разложить по столбцу:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \ \textit{для любого столбца } j.$$

◀ По свойству 7 справедливо разложение:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{i2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По лемме 6 каждое k-ое слагаемое в полученной сумме равно $a_{ik}A_{ik}$. ▶

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 1 & 2 & \ldots & -1+n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \ldots & n^2 \\ 1 & 2 & 9 & \ldots & n^2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2 & \sin 3 & \ldots & \sin n \\ 1 & 2 & \sin 3 & \ldots & \sin n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & \sin n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{pmatrix}.$$

3. Найдите определители матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & \ldots & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

4. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 27 & \ldots & 3^n \\ 3 & 3 & 27 & \ldots & 3^n \\ 3 & 9 & 9 & \ldots & 3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 3 & 9 & 27 & \ldots & 3^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 20 & \ldots & 20 & 20 & 20 \\ 0 & \ldots & 0 & x & -x \\ 0 & \ldots & x & -x & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \ldots & 1 & 4 & 1 \\ 1 & \ldots & 6 & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2n & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \dots & 2^n \\ 2 & 2 & 8 & \dots & 2^n \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 5 & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 4 & \dots & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & \dots & 5 & 5 & 10 \\ 5 & \dots & 5 & 10 & 5 \\ 5 & \dots & 10 & 5 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10 & \dots & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1.5 Примеры вычисления определителей матриц $n \times n$

1.5.1 Приведение к треугольному виду

Лемма 7 *При попарной перестановке строк матрицы A знак определителя изменится на $(-1)^{[\frac{n}{2}]}$*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{[\frac{n}{2}]} \det \begin{pmatrix} a_{1n} & \dots & a_{12} & a_{1n} \\ a_{2n} & \dots & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & a_{n2} & a_{n1} \end{pmatrix}$$

◀ При четном n достаточно $\frac{n}{2} = [\frac{n}{2}]$ перестановок, при нечетном n — $\frac{n-1}{2} = [\frac{n-2}{2}]$ ▶

1.5.2 Рекуррентные соотношения

Лемма 8 *Пусть*

$$I_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad I'_{n-1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда определитель I_n удовлетворяет рекуррентному соотношению $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$ и начальному условию $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$.

◀ Разложим I_n по первой строке по Лапласу: $I_n = 2I_{n-1} - 3I'_{n-1}$. В свою очередь I'_{n-1} разложим по первому столбцу: $I'_{n-1} = I_{n-2}$. Тогда $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$. Равенства $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$ легко проверяются прямыми вычислениями. ▶

1.5.3 Определитель Вандермонда

Лемма 9 *Верно равенство*

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

◀ Вычтем первую строку из каждой k-й строки ниже, умножим на x_1^{k-1}. В результате обнулим первый столбец ниже элемента 1. В результате разложения определителя по первому столбцу достаточно найти определитель

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 + x_1 & \dots & x_n + x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{k-2}(x_2, x_1) & \dots & Q_{k-2}(x_n, x_1) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $a^k - b^k = (a-b)Q_{k-1}(a,b)$, где $Q_{k-1}(a,b) = a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}$.

Из равенства $Q_{k-1}(a,b) - bQ_{k-2}(a,b) = a^{k-1}$ следует, что вычитая из каждой строчки

▶

1.6 Матрица и операции над матрицами

Матрица над полем вещественных чисел размерности $m \times n$ — таблица составленная из m строк и n столбцов заполненная вещественными числами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Обозначается через $(a_{ij})_{m\times n}$.

Если элементы матрицы (15) совпадают с коэффициентами с.л.у. (5), то матрицу (15) называют *матрицей с.л.у.* (5). Следующую матрицу называют *расширенной матрицей с.л.у.* (5)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & \dots & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{16}$$

Матрицы одинаковой размерности можно *суммировать*:

$$(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Любую матрицу можно *умножить на число*: $\lambda(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Умножение определено для матриц $(a_{ij})_{m\times n}$ и $(b_{ij})_{r\times s}$, если число столбцов n первого сомножителя равно числу строк r второго сомножителя:

$$(c_{ij})_{m\times s} = (a_{ij})_{m\times n} \cdot (b_{ij})_{n\times s}, \text{ где } c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}. \tag{17}$$

Следующие свойства суммирования матриц следуют из свойств вещественных чисел:

1) Для любых $(n \times m)$-матриц A, B, C справедливо $A + (B + C) = (A + B) + C$.

2) Для любых $(n \times m)$-матриц A, B $A + B = B + A$.

3) Для любой A матриц $n \times m$ $A + B = B + A$.

Свойства произведения матриц:

1) Для матриц A, B, C подходящих размеров $A(BC) = (AB)C$.

2) Существуют матрицы A, B такие, что $AB \neq BA$.

Свойства дистрибутивности матриц: 1) Для матриц A, B, C подходящих размеров

$$A(B + C) = AB + AC.$$

1.6.1 Матрицы специального вида

Матрица называется *квадратной,* если число ее строк равно числу столбцов.

Диагональю квадратной матрицы $(a_{ij})_{n\times n}$ называются элементы матрицы a_{ii}, $i = \overline{1,n}$.

Диагональной матрицей называется матрица с нулевыми элементами вне диагонали. Обозначается как

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где $a_{ii} = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$.

Матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной*. Легко проверить,что произведение любой квадратной матрицы A на единичную матрицу соответствующей размерности равно самой матрице $A = AE = EA$. Элементы единичной матрицы обозначают, как

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Теорема 5 *Для любых квадратных матриц справедливо равенство*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

1.6.2 Матричная запись с.л.у.

Теперь любую систему л.у. вида (1) можно представить в виде равенства матрицы b с произведением матриц A и b.

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Проверьте правильность сказанного выше утверждения.

2. Во сколько раз меньше символов требуется, чтобы записать уравнение в матричном виде?

3. Что такое "деление матрицы на матрицу"?

1.6.3 Обратные матрицы

Определение 7 *Матрица B такая, что $AB = BA = E$ называется обратной матрицей матрицы A. Обозначается через A^{-1}.*

Невырожденным называется квадратная матрица с ненулевым определителем.

Теорема 6 *Пусть $A = (a_{ij})_{n \times n}$ невырожденная квадратная матрица.*

Тогда матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

является обратной матрицы A.

◀ Пусть $(c_{ij})_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n} \times (\frac{A_{ji}}{\det A})_{n\times n}$. Докажем, что $c_{ij} = \delta_{ij}$.

Рассмотрим $c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. По теореме Лапласа сумма $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ является разложением определителя матрицы с двумя совпадающими строками, если $i \neq j$; и матрицы A, если $i = j$ ▶

Мы показали, что каждая невырожденная матрица имеет обратную матрицу. Из теоремы 5 следует, что вырожденные матрицы не имеют обратных.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Покажите, что вырожденные матрицы не имеют обратных.

2. Покажите, что $A^{-1}b$ является решением уравнения $Ax = b$.

3. Напишите с.л.у.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 13 & 6 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью нахождения обратной матрицы.

4. Приведите пример уравнения $Ax = b$, которое не имеет решения bA^{-1}.

1.7 Формула Крамера

Теорема 7 (Крамер) *Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ & .. & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$$

с невырожденной квадратной матрицей A. Пусть A_i получена из A заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Тогда система $Ax = b$ имеет единственной решение:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, \frac{\det A_n}{\det A} \right).$$

◀ Докажем справедливость формулы Крамера. Матрица $A^{-1}b$ размерности $n \times 1$ является решением с.л.у. Используя предыдущую теорему, получим решение

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ji}}{\det A} b_i, \text{ для } j = \overline{1, n}.$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} A_{ji} b_i$ является разложением определителя матрицы A_j по j-му столбцу — столбцу свободных членов.

Докажем единственность решения. Пусть сущестует еще одно решение x'. Тогда

$$x' = A^{-1}Ax' = A^{-1}b = x \quad \blacktriangleright$$

Экзаменационные вопросы по "Геометрии и алгебре" (алгебра)
ПМ-09. 1 курс, 2 семестр. ***http://yktmath.narod.ru***

1. Определение комплексных чисел и операций над ними. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: аргумент комплексного числа, модуль комплексного числа, существование тригонометрической формы, сложение и умножение комплексных чисел.

2. Вычисление аргумента комплексного числа. Формула вычисления степени комплексных чисел и формула Муавра. Корни многочлена $z^n = 1$.

3. Многочлен. Степень многочлена. Приведенный многочлен. Свободный и старший члены многочлена. Произведение многочленов. Леммы о степени многочлена.

4. Деление с остатком многочленов. Неполное частное и остаток. Теорема о существовании неполного частного при делении многочленов (деление уголком).

5. Наибольший общий делитель многочленов. Лемма о равенстве НОД. Алгоритм Евклида.

6. Корень многочлена. Основная теоремы алгебры.

7. Теорема Безу. Кратность корня. Следствия основной теоремы.

8. Теорема Виета. Теорема о целых корнях. Теорема о рациональных корнях.

9. Рациональные дроби. Теорема о разложении рациональной дроби.

10. Векторное пространство. Примеры.

11. Система векторов. Линейная комбинация векторов. Тривиальная и нетривиальная линейная комбинация. Линейная независимость и зависимость системы векторов. Критерий линейной зависимости векторов. Алгоритм выяснения линейной зависимости векторов.

12. Базис векторного пространства. Размерность векторного пространства. Координаты вектора. Существование и единственность координат вектора.

13. Теорема о матрице перехода от базиса к базису.

14. Линейная оболочка векторов. Лемма о том, что любая линейная оболочка векторов является векторным подпространством.

15. Биекция. Сохранение операций. Изоморфизм векторных пространств. Теорема об изоморфизме любого конечномерного векторного пространства некоторому пространству $\mathbb{R}^n$.

16. Векторное подпространство. Критерий подпространства. Примеры подпространств различных векторных пространств.

17. Однородная и неоднородная системы линейных уравнений. Теорема о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений является линейным подпространством. Фундаментальная система решений. Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений.

18. Линейное многообразие с вектором сдвига и направляющим пространством. Теорема о том, что множество решений неоднородной системы линейных уравнений является линейным многообразием.

19. Операции над векторными подпространствами: суммирование, пересечение и ортогональное дополнение. Теорема об ортогональном дополнении и решениях однородной системы линейных уравнений.

20. Прямая сумма подпространств. Теорема о размерности суммы векторных подпространств. Лемма о дополнении базиса векторного подпространства до базиса всего пространства.

21. Теорема о выражении пересечения подпространств через ортогональное дополнение.

22. Операции над системами векторов, не влияющие на линейную зависимость.

23. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Длина (норма) вектора, угол между векторами, проекция вектора на вектор. Теорема о выражении проекции вектора на вектор через скалярное произведение.

24. Ортонормированный базис. Алгоритм ортогонализации Грамма-Шмидта. Нормирование вектора. Разложение матрицы на произведение ортогональной и треугольной матрицы.

25. Проекция вектора на линейную оболочку векторов. Теорема о кратчайшем расстоянии от точки до линейной оболочки векторов.

26. Линейные преобразования (операторы). Основное свойство. Следствие о задании линейного преобразования квадратной матрицы. Образ нулевого вектора.

27. Собственное число и собственный вектор линейного преобразования. Характеристический многочлен. Вычисление характеристического многочлена с помощью главных миноров.

28. Жорданова клетка. Жорданова нормальная форма матрицы. Теорема о матрице линейного преобразования с n собственными векторами.

29. Квадратичная форма. Канонический вид квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы. Алгоритм приведения произвольной квадратичной формы к каноническому виду.

30. Основная теорема о квадратичных формах.

31. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности квадратичной формы. Главные угловые миноры. Критерий Сильвестра.

2 Комплексные числа

Чтобы определить комплексные числа введем обозначение i, обладающее свойством $i^2 = -1$. Выражения вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ будем называть компле́ксными числами. Множество всех таких чисел обозначим $\mathbb{C}$. Сложение и умножение комплексных чисел $z = a + bi$, $w = c + di$ определим следующим образом:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i, \quad z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение определены аналогично операциям для многочленов с учетом $i^2 = -1$. Основная причина потребности в таких числах — основная теоремы алгебры, которую докажем позже. Кроме этого, существует естественный процесс "расширения" чисел:

Натуральные числа $\mathbb{N}$, если потребовать существование противоположных элементов, расширяется с помощью -1. Получаются целые числа $\mathbb{Z}$. Натуральные числа $\mathbb{Z}$, если потребовать существование обратных элементов, расширяется с помощью чисел вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Получаются рациональные числа $\mathbb{Q}$. Натуральные числа $\mathbb{Q}$, если потребовать непрерывность, имеют расширение действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$. Действительные числа $\mathbb{R}$, если потребовать существование корней для любых многочленов, имеют расширение комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Найдем противоположную и обратную комплексного числа $z = a + bi$. Ясно, что противоположным z является $-a - bi$. Действительно, $a + bi + (-a - bi) = (-a - bi) + a + bi = 0$.

Обратным z является $\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$. Действительно, $(a + bi)\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}(a + bi) = 1$.

Таким образом,

$$(a + bi) : (c + di) = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2}.$$

Вещественной частью числа $z = a + bi$ называется число $a = \operatorname{Re} z$. Мнимой частью числа $z = a + bi$ называется число $b = \operatorname{Im} z$. Сопряженным к числу $z = a + ib$ называется число $\overline{z} = a - ib$. Модулем числа z называется вещественное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Лемма 10 *Для любых комплексных чисел z справедливы равенства*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}, \quad z^{-1} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Доказательство леммы элементарно.

Заметим, что множество комплексных чисел содержит все вещественные числа.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Поставим в соответствие комплексному числу $a + ib$ вектор $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ на плоскости. Ясно, что данное соответствие является биекцией: для каждого комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ существует вектор $v = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$; для каждого вектора $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ существует комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$; каждому элементу $z \in \mathbb{C}$ соответствует единственный элемент $v \in \mathbb{R}^2$.

Лемма 11 *Пусть числам $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ соответствуют векторы $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$. Тогда*

$$z_1 = z_2 + z_3 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_2 + v_3.$$

Лемма 12 (Существование и единственность тригонометрической формы) *Для каждого ненулевого комплексного числа $z = a+bi \in \mathbb{C}$ существуют положительное вещественное число $r \in \mathbb{R}$ и угол $\varphi \in [0; 2\pi)$ такие, что*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Кроме этого, (r, φ) является единственной такой парой.

Определение 8 *Число $r = \sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем числа $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Обозначается через $|z|$. Угол*

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если} \quad b \geqslant 0; \\ 2\pi - \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \text{если} \quad b < 0, \end{cases}$$

называется аргументом числа $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Обозначается через $\arg z$.

Приведем примеры нахождения тригонометрической формы комплексного числа.

Пусть $z = 8-6i$. Тогда $|z| = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10$ и $\arg z = 2\pi - \arccos 0,8$, поскольку $Imz < 0$.

Пусть $z = 7+\sqrt{51}i$. Тогда $|z| = 10$ и $\arg z = \arccos 0,07$, поскольку $Imz \geqslant 0$.

Пусть $z = -6-6i$. Тогда $|z| = 6\sqrt{2}$ и $\arg z = 2\pi - \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})$, поскольку $Imz < 0$. Следовательно, $\arg z = \frac{5\pi}{4}$.

Лемма 13 *Произведение произвольных комплексных чисел*

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

равно

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

т.е.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{и} \quad \arg(z_1+z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Из леммы 13 с помощью математической индукции следует утверждение.

Следствие 1 *n-ая степень комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ равно*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

В других обозначениях $|z^n| = |z|^n$ и $\arg z^n = n\arg z$.

Из доказанных утверждений выведем важное следствие, называемое формулой Муавра.

Теорема 8 (Муавра) *Уравнение $z^n = R(\cos\psi + i\sin\psi)$ имеет ровно n корней*

$$z = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi+2\pi k}{n}\right), \text{ где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Приведем еще одно применение следствия 1.

Лемма 14 *Поскольку $(\cos\psi + i\sin\psi)^n = \cos n\psi + i\sin n\psi$.*

Тогда

$$\cos n\psi = Re\,(\cos\psi + i\sin\psi)^n \text{ и } \sin n\psi = Im\,(\cos\psi + i\sin\psi)^n.$$

Из леммы 14 следует, что

$$\begin{aligned}
\cos 2\psi &= \cos^2\psi - \sin^2\psi;\\
\cos 3\psi &= \cos^3\psi - 3\cos\psi\sin^2\psi;\\
\cos 4\psi &= \cos^4\psi - 6\cos^2\psi\sin^2\psi + \sin^4\psi;
\end{aligned}$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{2010}. При каких n верно равенство $i^n = 1$?

2. Вычислите $(2+3i)(1+i)$, $(5+2i):(7+i)$, $(4+3i):(1-8i)$.

3. Найдите произведения $(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4})$, $(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6})$.

4. Приведите к тригонометрической форме числа $1+i$, $\sqrt{3}+i$, i, $3+4i$, $7+5i$.

5. Приведите к тригонометрической форме числа по рисунку $1-i$, i, $-i$, $-1+i$.

6. Найдите все комплексные корни $z^2=1$, $z^4=1$, $z^8=1$, $z^{12}=1$, $z^3=1$. Нарисуйте корни на комплексной плоскости.

7. Найти наименьшее значение $|z-5|+|z-5i|$, где комплексные числа z удовлетворяют условию $z^2-\bar{z}^2=16i$.

8. Пусть z — комплексное число, у которого $|z|=1$ и $z\neq -1$. Докажите, что найдется действительное число t такое, что

$$z=\frac{1+it}{1-it}.$$

9. Упростите выражение:

$$\left|\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right|,$$

где $x,\ y,\ z$ — комплексные числа и $|x|=|y|=|z|=r\neq 0$.

10. Точки числовой плоскости, соответствующие комплексным числам $c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n$, являются вершинами выпуклого n–угольника. Докажите, что если комплексное число z_0 является корнем уравнения

$$\frac{1}{z-c_1}+\frac{1}{z-c_2}+\ldots+\frac{1}{z-c_n}=0,$$

то точка, соответствующая числу z_0, лежит внутри данного многоугольника.

Многочлены

Определение 9 *Выражения вида*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

называются многочленами (полиномами). Если $a_n \neq 0$, то n — степень многочлена. Обозначается через $\deg P(x)$. Многочлен с единичным старшим членом $a_n = 1$ называется приведенным. Коэффициент a_0 называется свободным членом. Множество всех многочленом с вещественными коэффициентами обозначается через $\mathbb{R}[x]$, комплексными — $\mathbb{C}[x]$, целыми — $Z[x]$.

Замечание. Числа являются многочленами нулевой степени. $\deg(x^2 + ax + c) = 2$.

Лемма 15 *Для любых $P(x)$ и $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ справедливо неравенство*

$$\deg(P(x) + Q(x)) \leqslant \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}.$$

Замечание. Для $P = 1 - x^2$ и $Q(2 + x^2)$ нет равенства в выражении леммы 15.

Лемма 16 *Для любых $P(x)$ и $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ справедливо равенство*

$$\deg(P(x)Q(x)) = \deg P(x) + \deg Q(x).$$

Определение 10 *Если*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, Q(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l,$$

то произведением PQ называется многочлен

$$PQ = \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} x^j = \sum_{j=1}^{n+m} \sum_{k+l=j} a_k b_l x^j.$$

Если для $P, Q, R \in \mathbb{R}[x]$ справедливо $P = RQ$, то определена операция деления P на Q :

$$P : Q = R.$$

Если $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ справедливо равенство $P = RQ + r$ и $\deg r < \deg Q$, то определена операция деления P на Q с остатком

$$P : Q = R(ост.r).$$

Напомним термины: P — делимое, Q — делитель, R — неполное частное, r — остаток.

Теорема 9 (о существовании неполного частного) *Любой $P \in \mathbb{R}[x]$ можно поделить на произвольный ненулевой $Q \in \mathbb{R}[x]$ с остатком. Другими словами, для любых $P, Q \neq 0 \in \mathbb{R}[x]$ существуют R и $r \in \mathbb{R}[x]$ такие, что $P = QR + r$ и $\deg r < \deg Q$.*

◀ Опишем алгоритм деления с остатком. Затем покажем, что этот алгоритм корректен. Пусть $P_1 = P$ и $i = 1$.

1-й шаг. Если $\deg P_i < \deg Q$, то $r = P_i$.

2-й шаг. Если $\deg P_i \geqslant \deg Q$, то пусть

$$P_{i+1} = P_i - \frac{\text{ст.коэфф. } P_i}{\text{ст.коэфф. } Q} \cdot x^{\deg P_i - \deg Q} \cdot Q \tag{18}$$

Далее продолжаем следующую итерацию для $i \mapsto i+1$.

В результате работы алгоритма мы имеем следующие равенства

$$\begin{aligned} P_1 &= R_1 Q + P_2; \\ P_2 &= R_2 Q + P_3; \\ &\dots \\ P_{k-1} &= R_{k-1} Q + P_k; \\ P_k &= r, \end{aligned}$$

где $\deg P_k < \deg Q$. Поскольку в результате обратных подстановок мы получим

$$P = P_1 = (R_1 + R_2 + \ldots + R_{k-1})Q + r, \quad \deg r < \deg Q,$$

$$\begin{array}{l|l} x^3+3x^2-3 & \underline{x+2} \\ \underline{x^3+2x^2} & x^2+x-2 \\ \quad x^2-3 & \\ \quad \underline{x^2+2x} & \\ \qquad -2x-3 & \\ \qquad \underline{-2x-4} & \\ \qquad\qquad 1 & \end{array}$$

то r — остаток от деления P на Q. Затем мы найдем неполное частное $R = (P - r) : Q$.

Поскольку $Q \neq 0$, то старший коэффициент Q не равен 0. Алгоритм не содержит деления на ноль. Алгоритм сделает не более $1 + \deg P$ итераций, т.е. является конечным. ▶

Описанный в доказательстве алгоритм является хорошо известным с начальных классов школы алгоритмом деления "уголком". Приведем пример деления $x^3 + 3x^2 - 3$ на $x + 2$ с остатком. В совершенно непонятной формуле (18) записан совершенно понятный и естественный выбор элементов неполного частного: в данном случае $x^2 + x - 2$. Остаток равен 1. В данном случае произведено 4 итерации.

Наибольший общий делитель многочленов

Пусть $P \bmod Q$ — остаток от деления P на Q.

Заметим, что $P \bmod Q = P \bmod \lambda Q$ для любых ненулевых $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 17 *Если $\deg P \geqslant \deg Q$, то НОД(P, Q) = НОД$(P - \lambda x^k Q, Q)$ для любого ненулевого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

◀ Пусть N — множество всех общих делителей P и Q, M — множество всех общих делителей $P - \lambda x^k Q$ и Q. Мы покажем, что $N \subset M$ и $M \subset N$. Это будет означать равенство НОД$(P, Q) =$ НОД$(P - \lambda x^k Q, Q)$.

Действительно, если P и Q кратны $D \in \mathbb{R}[x]$, то $P - \lambda x^k Q$ кратен D для $k \geqslant 0$. Следовательно, $N \subseteq M$. Обратно, если $P - \lambda x^k Q$ и $Q(x)$ кратен $E \in \mathbb{R}[x]$, то $(P - \lambda x^k Q) + \lambda x^k Q$ также кратен $E(x)$. Поэтому $M \subseteq N$ ▶

Из леммы 17 следует следующая теорема

Теорема 10 (Алгоритм Евклида) *Если $\deg P \geqslant \deg Q$, то НОД(P, Q) = НОД$(P \bmod Q, Q)$.*

Основная теорема алгебры

Определение 11 *Если для числа $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливо $P(x_0) = 0$, то число x_0 называется корнем многочлена.*

Теорема 11 *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P > 0$, имеет хотя бы один комплексный корень.*

Докажем техническую лемму

Лемма 18 *Пусть $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $A = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|\}$. Тогда для любого $k > 0$ верно неравенство*

$$|x|^n > k|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0|$$

для всех комплексных $x \in \mathbb{C}$ находящихся вне окружности $|x| > Ak + 1$ на комплексной плоскости

Заметим, что для любых комплексных чисел $a, b \in \mathbb{C}$ справедливы равенство $|ab| = |a| \cdot |b|$ и неравенство $|a| + |b| \geqslant |a + b|$, которое называется неравенством треугольников.

Доказательство леммы 18. По неравенству треугольника

$$\begin{aligned}
&|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0| \leqslant \\
&\quad \leqslant |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x| + |a_0| \leqslant |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2| + |a_1x| + |a_0| \leqslant \\
&\quad \leqslant |a_{n-1}x^{n-1}| + \ldots + |a_2x^2| + |a_1x| + |a_0| \leqslant |a_{n-1}| \cdot |x^{n-1}| + \ldots + |a_1| \cdot |x| + |a_0| \leqslant \\
&\quad \leqslant A(|x^{n-1}| + \ldots + |x|^2 + |x| + 1) = A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}.
\end{aligned}$$

Поскольку $|x| > 1$, то верно неравенство

$$A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} \leqslant A\frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Последнее выражение меньше $\frac{1}{k}|x|^n$ для всех $|x| > Ak + 1$. Лемма доказана.

Приведем лемму Даламбера.

Лемма 19 (Даламбер) *Для любого многочлена $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg Q(x) > 0$ и точки $z \in \mathbb{C}$ существует $h \in \mathbb{C}$ такое, что $|Q(z)| \geqslant |Q(z + h)|$ если $Q(z) \neq 0$.*

Доказательство основной теоремы алгебры.

?????????????????

Теорема 12 (Безу) *Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x] \cup \mathbb{C}[x]$. Верны два утверждения:*

Если $P(c) = 0$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$, то $P(x)$ кратно $(x - c)$.

Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x] \cup \mathbb{C}[x]$. Остаток от деления $P(x)$ на $(x - c)$ равен $P(c)$.

Доказательство теоремы Безу. Первое утверждение теоремы хорошо известно как теорема Безу. Но поскольку второе утверждение является более общим, то мы докажем его.

Остаток от деления на многочлен первой степени имеет нулевую степень, поэтому $P(x) \bmod (x - c)$ является числом. Обозначим его через a. По определению деления с остатком многочлены $P(x)$ и $(x - c)Q(x) + a$ равны. Следовательно, они равны и при $x = c$. Это означает $a = P(c)$. Теорема доказана.

Определение 12 *Если $P(x)$ кратно $(x-c)^k$, но не кратно $(x-c)^{k+1}$, то корень называется корнем $P(x)$ кратности k.*

Следствие 2 *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени $n = \deg P(x)$ имеет ровно n корней с учетом кратности.*

Следствие 3 *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени $n = \deg P(x)$ можно представить в виде произведения линейных многочленов*

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

единственным образом с точностью до перемены местами сомножителей.

Кольцо многочленов — сложение и умножение многочленов. Свойства кольца многочленов: ассоциативность, существование нуля, существование противоположного, коммутативность, ассоциативность умножения, существование единицы. дистрибутивность.

Теорема 13 (Виет) *Если $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}(x)$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.*

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}
a_0 &= (-1)^n x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n;\\
a_1 &= (-1)^{n-1}(x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + x_1x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + \ldots + x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1});\\
&\ldots\\
a_{n-2} &= x_1x_2 - x_1x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n;\\
a_{n-1} &= -x_1 - x_2 - \ldots - x_n;
\end{aligned}$$

$\triangleleft$ Проверить прямым подсчетом $\triangleright$

Теорема о рациональных корнях многочлена.

Теорема 14 *Если $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}(x)$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то a_n кратно q, а a_0 кратно p. ∇ б.д. $\triangle$*

Оценка корней многочлен — теорема.

Теорема 15 (Оценка корней многочлена снизу и сверху) *Пусть $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}(x)$. Тогда все вещественные корни лежат на отрезке $\left[-1 - \frac{A}{|a_n|}; 1 + \frac{A}{|a_n|}\right]$, где $A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$.*

$\triangleleft$ Вывести, используя формулу суммирования геометрической прогрессии, из очевидного равенства $|a_nx_0^n| = |a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0 + a_0|$, где x_0 — корень $P(x)$. $\triangleright$

Алгоритм Штурма определения числа вещественных корней. Оценка корней многочлена с помощью алгоритма Штурма.

Метод Ньютона

Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть неизвестную функцию $f(x)$ известно, что

$$f(x_1) = c_1, \quad f(x_2) = c_2, \quad \ldots, \quad f(x_{n+1}) = c_{n+1}.$$

Многочлен

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i \frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(x-x_i)}\cdot\ldots\cdot(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(x_i-x_i)}\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{n+1})}$$

называется интерполяционным многочленом Лагранжа, интерполирующим (приближающим) функцию $f(x)$. Легко видеть, что $P(x_j) = c_j$ для всех $j = \overline{1,(n+1)}$.

Формула Виета

Определение 13 *Многочлен* $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *называется приведенным, если* $a_n = 1$.

Теорема 16 *Пусть приведенный многочлен* $P(x)$ *имеет корни* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -x_1 - x_2 - \ldots - x_n;\\
a_{n-2} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots - x_{n-1}x_n;\\
a_{n-3} &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots - x_{n-2}x_{n-1}x_n;\\
&\ldots\\
a_0 &= x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n.
\end{aligned}$$

Рациональные дроби

Определение 14 *Если* $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, *то выражения вида* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *называется рациональной дробью.*

Простейшими рациональными дробями называются дроби вида

$$\frac{b}{x+a}, \quad \frac{b}{(x+a)^2}, \quad \frac{b}{(x+a)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{cx+d}{x^2+ax+b}, \quad \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^2}, \quad \ldots$$

Многочлен $P(x)$ *называется неприводимым, если он не представим в виде* $P(x) = Q(x)R(x)$, *где* $\deg Q,\ \deg R \geqslant 1$.

Лемма 20 *Неприводимые многочлены в* $\mathbb{C}[x]$ *— линейные многочлены и числа* $\{a_1x+a_0 \mid a_1, a_0 \in \mathbb{C}\}$.

Неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$ *— квадратичные трехчлены, линейные многочлены и числа* $\{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_1^2 - 4a_0a_2 < 0\} \cup \{a_1x + a_0 \mid a_1, a_0 \in \mathbb{C}\}$.

◀ Первое утверждение следует из основной теоремы алгебры.

Докажем второе утверждение. Поскольку $\overline{a+bi} + \overline{c+di} = \overline{(a+bi)+(c+di)}$ и $(\overline{a+bi})(\overline{c+di}) = \overline{(a+bi)(c+di)}$,

$$P(\overline{z_0}) = a_n\overline{z_0}^n + a_{n-1}\overline{z_0}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z_0} + a_0 = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0.$$

Если z_0 является корнем $P(z)$, то $\overline{z}_0$ также является корнем $P(z)$.

Рассмотрим разложение $P(z)$, $\deg P = k+s$, на произведение линейных многочленов

$$P(z) = (z-r_1)(z-r_2)\cdot\ldots\cdot(z-r_k)(z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_s), \quad r_1,\ldots,r_k \in \mathbb{R}, z_1,\ldots,z_s \in \mathbb{C}.$$

Некоторые сомножители соответствуют вещественным корням, другие — комплексным. Из доказанного выше следует, что все комплексные корни разбиваются на пары сопряженных.

$$P(z) = (z-r_1)(z-r_2)\cdot\ldots\cdot(z-r_k)(z-z_1)(z-\overline{z}_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_r)(z-\overline{z}_r).$$

Произведения вида $(z-z_i)(z-\overline{z}_i)$ равны $z^2-(z_i+\overline{z}_i)z+z_i\overline{z}_i$. Поскольку $z_i+\overline{z}_i$ и $z_i\overline{z}_i$ вещественны, то такие произведения $(z-z_i)(z-\overline{z}_i) = z^2+a_iz+b_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$. ►

Теорема 17 *Любая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и простейших рациональных дробей.*

3 Векторные пространства

Определение 15 *Множество V с операциями сложения векторов и умножения вектора на число называется векторным (линейным) пространством, если выполнены следующие восемь аксиомы для любых $u, v, w \in V$ и произвольных чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*

1) $u + v = v + u$; *аксиома коммутативность*

2) $u + (v + w) = (u + v) + w$; *аксиома ассоциативности*

3) существует $\vec{O} \in V$ такой, что $u + \vec{O} = \vec{O} + u = u$ для любого $u \in V$;

4) для любого v существует вектор, обозначаемый через $-v$ такой, что

$$v + (-v) = -v + v = \vec{O};$$

5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$; *аксиома дистрибутивности*

6) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$; *аксиома дистрибутивности*

7) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;

8) $1 \cdot v = v$;

Элементы векторного пространства называются векторами.

В курсе алгебры векторы не выделяются стрелкой сверху.

Примеры векторных пространств: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $C[a, b]$.

Лемма 21 *Кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ является векторными пространством.*

Определение 16 *Системой векторов называется называется упорядоченное множество векторов. Линейной комбинацией*

Линейной комбинацией системы векторов v_1, v_2, ..., v_n называется выражения вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Если в выражении все коэффициенты равны $0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n$, то линейная комбинация называется тривиальной.

Если вектор w равен некоторой линейной комбинации системы векторов v_1, v_2, ..., v_n, то говорят "w линейно выражается через v_1, v_2, ..., v_n".

Если некоторая нетривиальная линейная комбинация векторов v_1, v_2, ..., v_n равна нулевому вектору, то эта система векторов называется линейно зависимой.

Система векторов называется линейно независимой, если из равенства нулю линейной комбинации векторов следует тривиальность этой линейной комбинации.

Последнее определение можно переформулировать следующим образом:

Система векторов называется линейно независимой, если линейная комбинация системы векторов равна нулевому вектору только в тривиальном случае.

Система векторов называется линейно независимой, если все нетривиальные ее линейные комбинации системы векторов не равны нулевому вектору.

Лемма 22 *Система векторов линейно зависима если и только если хотя бы один вектор из этой системы линейно выражается через остальные.*

Определение 17 *Система векторов* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *называется базисом векторного пространства* V, *если*

1) $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *— линейно независима;*

2) каждый вектор V *линейно выражается через векторы этой системы векторов.*

Размерностью векторного пространства V *называется количество векторов в его базисе.*

Заметим, что размерность пространства не зависит от выбора базиса.

Координаты вектора

Определение 18 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ базис пространства V. Координатами вектора $w \in V$ называется набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.*

Координаты вектор всегда определяются относительно некоторого базиса. При работе с несколькими базисами мы будем писать $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_e$, что означает $v = e_1\alpha_1 + \ldots + e_n\alpha_n$.

Лемма 23 (Об единственности координат) *Каждый вектор имеет единственный набор координат.*

Лемма 24 (О матрице перехода от базиса к базису в $\mathbb{R}^3$) *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ даны два базиса*

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3), \qquad & p &= (p_1, p_2, p_3),\\ b &= (b_1, b_2, b_3), \qquad & q &= (q_1, q_2, q_3),\\ c &= (c_1, c_2, c_3), \qquad & r &= (r_1, r_2, r_3). \end{aligned}$$

Тогда матрица перехода от координат базиса a, b, c к координатам базиса p, q, r равна

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

◀ Пусть произвольный вектор v имеет координаты $(v_1, v_2, v_3)_{abc}$ относительно базиса a, b, c и координаты $(w_1, w_2, w_3)_{pqr}$ относительно базиса p, q, r.

По определению координат $v = v_1 a + v_2 b + v_3 c$ и $v = w_1 p + w_2 q + w_3 r$.

С одной стороны выпишем координаты v в стандартном базисе

$$v = v_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 \\ v_1 a_2 \\ v_1 a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 b_1 \\ v_2 b_2 \\ v_2 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_3 c_1 \\ v_3 c_2 \\ v_3 c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 + v_2 b_1 + v_3 c_1 \\ v_1 a_2 + v_2 b_2 + v_3 c_2 \\ v_1 a_3 + v_2 b_3 + v_3 c_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, v имеет следующие координаты в стандартном базисе

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица, составленная из координат линейно независимых векторов **имеет максимальный ранг**. Следовательно,

▶

3.1 Линейная оболочка векторов

Множество всех линейных комбинаций вида $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ "пробегают" $\mathbb{R}$, называется линейной оболочкой векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Обозначается $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Иногда $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ называется векторным пространством, натянутым на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Лемма 25 *Для любой системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейная оболочка $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ является векторным пространством.*

3.2 Изоморфизмы векторных пространств

Определение 19 *Отображение $f : V \to W$ называется биекцией, если оно*

1) взаимно однозначно ($f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$);

2) всюду определено на V (для любого $v \in V$ существует $f(v)$);

3) отображает "на" W (для любого $w \in W$ существует $v \in V$ такое, что $w = f(v)$);

Биекция $f : V \to W$ между векторными пространствами называется изоморфизмом векторных пространств, если она сохраняет оперции, т.е. для любых $v, u \in V$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$

4) $f(v +_V u) = f(v) +_W f(w)$;

5) $f(\alpha \cdot_V v) = \alpha \cdot_W f(v)$.

Здесь "$+_V$"операция сложения векторов, "$\cdot_V$"умножения вектора на число в пространстве V; "$+_W$"операция сложения векторов, "$\cdot_W$"умножения вектора на число в W.

Если существует изоморфизм между V и W, то векторные пространства V и W называются изоморфными. Обозначается через $V \cong W$.

Поскольку композиция биекций является биекцией, то $U \cong V$ и $V \cong W$, то $U \cong W$.

Теорема 18 (Об изоморфности n-мерных пространств) *Каждое векторное пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

3.3 Векторное подпространство

Определение 20 *Пусть W подмножество векторного пространства V является векторным пространством. Такие подмножества W называются векторными подпространствами V.*

Теорема 19 (Критерий подпространства) *Пусть V — произвольное векторное пространство и $W \subseteq V$ некоторое его подмножество.*

Тогда W является векторным подпространством W если и только если выполнены все следующие три условия

1) для любых $v, w \in W$ сумма $v + w \in W$;

2) для любого $w \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ произведение $\lambda w \in W$;

3) $\vec{O} \in W$.

Лемма 26 *Пусть V — векторное пространство. Подмножество $W \subset V$ является векторным подпространством V тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) для любых векторов $v, u \in W$ верно $v + w \in V$;

2) для любого вектора $v \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $\lambda v \in V$.

$\lhd$ Была доказана только половина утверждения: если два условия выполнены, то W — векторное подпространство V. Для этого достаточно проверить все аксиомы векторного пространства $\rhd$

Примеры:

$W = \langle 1, x \rangle$ подпространство $\mathbb{R}_3[x]$.

Теорема 20 *Пусть A — $m \times n$-матрица, $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Тогда множество всех решений однородной системы уравнений $Av = 0$ является векторным подпространством $\mathbb{R}^n$ размерности $n - \operatorname{rang} A$.

Определение 21 *Пусть v_0 — вектор, L — линейное подпространство V.*

Множество

$$\{v_0 + w \mid w \in L\}$$

называется линейным многообразием с вектором сдвига v_0 и направляющим пространством L.

Его размерностью называется размерность $\dim L$.

Определение 22 *Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис пространства ее решений.*

Теорема 21 *Пусть v_0 — частное решение системы уравнений $Av = b$ и L — пространство решений однородной системы линейных уравнений $Av = \vec{O}$.*

Тогда множество всех решений неоднородной системы уравнений $Av = b$ является линейным многообразием (x_0, L).

3.4 Суммирование и пересечение векторных подпространств

Определение 23 *Пусть $U = \langle u_1, u_2, \ldots, u_r\rangle$ и $W = \langle w_1, w_2, \ldots, w_s\rangle$ векторные подпространства векторного пространства V.*

Пересечением подпространств U и W называется подпространство

$$U \cap W = \{u \mid u \in U, w \in W\}.$$

Суммой подпространств U и W называется подпространство

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Сумма подрпространств называется прямой, если их пересечение имеет размерность 0. Обозначается через $U \oplus W$.

Ортогональным дополнением к подространству U пространства $\mathbb{R}^n$ называется

$$U^{\perp} = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) \mid u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n, \text{ для всех } (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U\}.$$

Теорема 22 *Пусть $U = \langle v_1, v_2, \ldots v_k\rangle$. Тогда $U^{\perp}$ является пространством решений однородной системы уравнений*

$$\left(\begin{array}{c|c} \longleftarrow v_1 \longrightarrow & 0 \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow & 0 \\ \ldots & \ldots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow & 0 \end{array}\right)$$

Теорема 23 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*

Тогда $U \cap W = (U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp}$.

Теорема 24 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*

Тогда $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$.

Лемма 27 *Пусть U векторное подпространство векторного пространства V.*

Тогда любой базис U можно дополнить до базиса V.

3.5 Определение линейной независимости векторов

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ векторы векторного пространства V. Справедливы следующие леммы, позволяющие выяснить линейную зависимость векторов за конечное число шагов.

Теорема 25 *Линейная независимость системы векторов не зависит от*

1) перестановки местами векторов системы векторов;

2) от умножения вектора системы векторов на ненулевое число;

3) от прибавления вектору системы векторов линейной комбинации других векторов системы векторов.

Это означает, что элементарными преобразованиями Гаусса векторы всегда можно привести к ступенчатому виду.

Евклидовы пространства

Определение 24 *Функция* $(\,\cdot\,,\,\cdot\,) : V \times V \to \mathbb{R}$ *называется скалярным произведением, если она обладет тремя свойствами для всех* u, w, v

1) $(u, v) = (v, u)$; *коммутативность*

2) $(u, u) > 0$ *кроме случая* $(\vec{O}, \vec{O}) = 0$; *положительная определенность*

3) $(u, \lambda w + \mu v) = \lambda(u, w) + \mu(u, v)$. *линейность*

Векторное пространство со скалярным произведением называется евклидовым. Длиной (нормой) вектора u *называется число* $\sqrt{(u, u)}$. *Углом между векторами* u *и* w *называется угол* $\alpha \in [0; \pi]$ *такой, что*

$$\cos \alpha = \frac{(u, w)}{|u||w|}.$$

Проекция вектора на вектор

Алгоритм Грамма-Шмидта

Пусть v_1, $v_2, \ldots,$

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & v_1; \\ e_2 & = & v_2 - \dfrac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1; \\ e_3 & = & v_3 - \dfrac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \dfrac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2; \\ & \ldots & \end{array}$$

Применяя процесс ортогонализации к столбцам матрицы можно доказать, что каждую невырожденную матрицу O можно разложить в произведение $A = OU$, где O — ортогональная матрица, а U — треугольная матрица с положительными элементами на диагонали.

Проекция вектора на линейную облочку векторов

Кратчайшее расстояние от точки до линейной облочки

Определение 25 *Расстоянием между множествами* A *и* $B \subset E$ *евклидова пространства называется*

$$\rho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} |AB|.$$

Теорема 26 *Пусть* E *— евклидово пространство.*

Расстояние от вектора v *до векторного подпространства* $W \subset E$ *равно*

$$\rho(v, W) = |v - \mathit{Пр}_W v|.$$

Единственным ближайшим к вектору v *является вектор* $\mathit{Пр}_W v$.

◄

►

Пример задачи выяснения линейной зависимости системы векторов.

Лемма о существовании координат относительно базиса.

3.5.1 Ранги матрицы.

Ранг матрицы A — число ненулевых строк после приведения A к ступенчатому виду.

Теорема. Все ранги матрицы совпадают.

3.6 Критерий совместности с.л.у.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна если и только если ранг матрицы с.л.у. совпадает с рангом расширенной матрицы с.л.у. $\overline{A}$:

Следствие о размерности ортогонального дополнения линейной оболочки линейно независимых векторов. Следствие о сумме размерности векторного подпространства W, его ортогонального дополнения $W^\perp$ и векторного пространства V.

Следствие 4 *Для любого векторного подпространства W векторного пространства V верно равенство*

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$

$\lhd$ Следует из теорем **??** и **??** $\rhd$

Следствие 5 *Если $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — линейно независимы, то*

$$\dim < v_1, v_2, \ldots, v_k >^\perp = n - k$$

$\lhd$ Следует из предыдущего следствия $\rhd$

Теорема о размерности линейной оболочки векторов и ранга матриц, составленной из координат векторов. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при умножении вектора на ненулевое число. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при замене v_i на $v_i + \lambda v_j$. Задача нахождения размерности линейной оболочки векторов.

Теорема 27 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы.*

Тогда

$$\dim < v_1, v_2, \ldots, v_k > = rang \begin{pmatrix} \longleftarrow & v_1 & \longrightarrow \\ \longleftarrow & v_2 & \longrightarrow \\ & \cdots & \\ \longleftarrow & v_k & \longrightarrow \end{pmatrix}$$

$\lhd$ Следует из теоремы **??** и следствий 4, 5 $\rhd$

Линейное преобразование векторных пространств

Определение 26 *Отображение $f : V \to V$ такое, что для любых векторов $w, v \in V$ и чисел λ, μ верно равенство $f(\lambda w + \mu v)$*

Теорема 28 (об основном свойстве линейного преобразования) *Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис векторного пространства V. Тогда для любого линейного преобразования $f : V \to V$ верно, что*

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n).$$

$\lhd$ Следует из определения линейных преобразований $\rhd$

Следствие о том, что каждое линейное преобразование можно представить с помощью матрицы.

Следствие 6 *Сопоставим векторам $v \in \mathbb{R}^n$ с координатами $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ матрицы-столбцы $\begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}$ размера $n \times 1$.*

Тогда для любого линейного преобразования $f : V \to V$ существует квадратная матрица A размера $n \times n$ такая, что $f(v) = Av$.

$\lhd$ Следует из теоремы 28 $\rhd$

Свойства линейных преобразований: образ нулевого вектора.

Лемма 28 *Пусть $f(v)$ — произвольное линейное преобразование векторного пространства V. Образ нулевого вектора $f(0)$ является нулевым вектором.*

$\lhd$ Следует из определения линейного преобразования $\rhd$

Свойства линейных преобразований: образ противоположного вектора.

Лемма о том, что каждая матрица задает некоторое линейное преобразование.

Лемма 29 *Пусть A — квадратная матрица $n \times n$. Тогда отображение Av является линейным преобразованием.*

$\lhd$ Проверить определение линейного преобразования $\rhd$

Собственные числа и собственные векторы линейных преобразований.

Характеристический многочлен матрицы A.

Лемма о корнях характеристического многочлена.

Лемма 30 *Комплексные корни характеристического многочлена матрицы A являются собственными числами матрицы A.*

$\lhd$ Выбрать произвольный корень λ_0. Показать, что уравнение $(A - \lambda E)v = 0$ имеет хотя бы одно ненулевое решение v. Затем показать, что $Av = \lambda v$ $\rhd$

Жорданова форма матрицы. Теорема о жордановой форме $T^{-1}AT = J$ матрицы A, если собственные числа попарно различны.

Теорема 29 *Если A — квадратная матрица $n \times n$ такая, что*

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \dots, Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ составляют базис $\mathbb{R}^n$, то верно равенство

$$AT = TJ_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \dots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow \end{pmatrix}^T \quad \text{и } J_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\triangleleft$ Показать справедливость теоремы прямыми вычислениями $\triangleright$

Лемма о произведении собственных числах. Лемма о собственных векторах симметрической матрицы $A = A^T$.

Лемма 31 *Пусть λ_1, λ_2, …, λ_n — собственные числа матрицы A размера $n \times n$.*

Тогда

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

$\triangleleft$ Следует из теорем 29, **??** и подсчета определителя диагональной матрицы. $\triangleright$

Лемма 32 *Если $A = A^T$, т.е. матрица A является симметрической, то собственные числа матрицы A являются вещественными.* ∇ *б. д.* $\triangle$

Преобразования координат. Формула перевода старых координат в новые координаты. Матрица перехода.

Лемма 33 *Пусть $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ — координаты вектора v относительно нового базиса $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и*

$(w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1n})$ — *координаты вектора w_1 относительно базиса e*

$(w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2n})$ — *координаты вектора w_2 относительно базиса e*

…

$(w_{n1}, w_{n2}, \dots, w_{nn})$ — *координаты вектора w_n относительно базиса e.*

Тогда координаты $(v'_1, v'_2, \dots, v'_n)$ вектора v относительно старого базиса $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ удовлетворяют условию:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \dots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \dots & w_{n2} \\ & & & \\ w_{1n} & w_{2n} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \dots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$ Переписать в выражении $v = v'_1 w_1 + v'_2 w_2 + \ldots + v'_n w_n$ векторы $w_1, w_2, \dots, w_n$ через векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ $\triangleright$

Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису. Переход к новому базису из собственных векторов и жорданова форма матрицы.

Лемма 34 *Пусть A — матрица линейного преобразования f относительно старого базиса W, B — матрица линейного преобразования f относительно нового базиса E и T — матрица перехода от старых координат к новым. Тогда верно равенство $B = T^{-1}AT$.*

Теорема о жордановой форме матрицы при совпадении собственных чисел.

Теорема 30 *Пусть f — линейное преобразование R^n такое, что*

$$Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}, \quad Av_{k+2} = \lambda_{k+2} v_{k+2}, \quad \ldots, \quad Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ линейно независимы, остальные собственные числа совпадают $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$.

Тогда существуют собственные и присоединенные к ним векторы v_1, v_k, $\ldots$, v_k такие, что

$$\begin{array}{llllll}
v_{s_1} & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f v_2 & \mapsto^f v_1 & \mapsto^f 0; \\
v_{s_2} & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f v_{s_1+2} & \mapsto^f v_{s_1+1} & \mapsto^f 0; \\
 & & \ldots & & \\
v_k & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f v_{s_t+2} & \mapsto^f v_{s_t+1} & \mapsto^f 0;
\end{array}$$

и верно равенство

$$AT = TJ, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \ldots \\ \longleftarrow v_n \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J = \begin{pmatrix} J_1 & & \ldots & & \\ & J_2 & \ldots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ldots & J_{t+1} & \\ & & \ldots & & J_{\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n} \end{pmatrix},$$

где

$$J_1, J_2, \ldots, J_{t+1} \text{ имеют вид } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

и размеры $s_1 \times s_1, (s_2 - s_1) \times (s_2 - s_1), \ldots, (s_{t+1} - s_t) \times (s_{t+1} - s_t)$ соответственно. ∇ *б.д.* $\triangle$

Функции от матриц.

Теорема 31 *Найдите эту теорему в теореме.* ∇ *б.д.* $\triangle$

Квадратичные формы. Мономы. Представление квадратичной формы с помощью матрицы.

Лемма о формуле изменения матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Лемма 35 *Пусть A — матрица квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ относительно старого базиса.*

Пусть C — матрица квадратичной формы $K(x') = (x')^T Cx'$ относительно нового базиса. Пусть также $x = Bx'$. Тогда

$$C = B^T AB.$$

$\triangleleft$ Доказывается в одну строчку $\triangleright$

Теорема о приведении матрицы квадратичной формы к диагональному виду (другими словами о приведении квадратичной формы к каноническому).

Теорема 32 *Пусть $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для любой квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что в новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид.*

Другими словами для любой квадратной матрицы A существует квадратная матрица B такая, что матрица $B^T AB$ является диагональной.

$\lhd$ Привести алгоритм выделения полного квадрата такое, что избавляется от переменных в выражении $\rhd$

Нормальный вид квадратичной формы. Сокращенная запись нормальной формы квадратичной формы.

Теорема 33 *Пусть $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для любой квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что в новом базисе квадратичная форма имеет нормальный вид.*

Другими словами для любой квадратной матрицы A существует квадратная матрица B такая, что матрица $B^T AB$ является диагональной с элементами -1, 1, 0 по диагонали.

$\lhd$ Вывести из предыдущей теоремы. $\rhd$

Теорема «Закон инерции» об единственности нормального вида квадратичной формы.

Теорема 34 (Закон инерции) *Нормальная форма квадратичной формы единственна с точностью до переобозначения.*

$\lhd$ Доказать от обратного $\rhd$

Положительно определенная квадратичная форма. Следствие о нормальном виде положительно. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Следствие 7 *Пусть квадратичная форма K в имеет следующий нормальный виде $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2 - x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2$. Форма K положительно определена тогда и только тогда, когда $l = 0$ и $k = n$.*

$\lhd$ В обе стороны очевидно $\rhd$

Теорема 35 (Критерий Сильвестра) *Пусть A — матрица квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$. Тогда $K(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A положительны. ∇ б.д. $\triangle$*

Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Лексиографический порядок на мономах. Основания теорема о симметрических многочленах.

Теорема 36 (Основаная о симметрических многочленах) *Каждый симметрический многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических.*

$\lhd$ Построить алгоритм построения таких многочленов. Из лексиографического отношения порядка следует конечность этого алгоритма. $\rhd$

ИНФ-10, Алексеев Евгений Михайлович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & -2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 12 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{6\times 2}$,$B_{3\times 4}$,$C_{3\times 2}$,$D_{3\times 6}$,$E_{3\times 3}$,$F_{3\times 5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 6 & -1 \\ 7 & 2 & 7 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & -1 \\ 7 & 7 & 6 & 3 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 4 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 12 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 6 & -1 \\ 4 & 4 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & -4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{5\times5}$,$B_{4\times5}$,$C_{5\times5}$,$D_{5\times4}$,$E_{4\times5}$,$F_{2\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Николаев Дьулус Викторович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & -2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -2 \\ 6 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times3}$,$B_{5\times3}$,$C_{6\times3}$,$D_{3\times5}$,$E_{2\times6}$,$F_{5\times4}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 10 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Федоров Иван Михайлович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

$$\textbf{1.}\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \textbf{2.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -2 \\ 6 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\textbf{3.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{4.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{5.}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{6.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\textbf{7.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{8.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

$$\textbf{10.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \end{array}\right) \quad \textbf{11.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 12 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

$$\textbf{13.}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{14.}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{15.}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \textbf{16.}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\textbf{17.}\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \textbf{18.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\textbf{19.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\textbf{21.}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & -1 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{22.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{6\times4}$,$B_{6\times3}$,$C_{3\times4}$,$D_{3\times4}$,$E_{6\times5}$,$F_{4\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

$$\textbf{25.}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{26.}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите обратные матрицы

$$\textbf{27.}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{28.}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Напишите с.л.у.

$$\textbf{29.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 14 \\ 4 & 6 & 18 \end{array}\right) \quad \textbf{30.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\textbf{31.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{32.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{33.}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{34.}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{35.}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Сидоров Айан Еримеевич

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 7 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений
$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$
При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & -2 \\ -2 & -4 & -3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{5\times3}$,$B_{5\times4}$,$C_{4\times4}$,$D_{3\times4}$,$E_{3\times3}$,$F_{6\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & -5 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 5 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 7 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 7 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 6 & -1 \\ 5 & 2 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 4 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times6}$,$B_{3\times3}$,$C_{5\times4}$,$D_{3\times4}$,$E_{5\times2}$,$F_{5\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Филиппов Анатолий Сергеевич

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 10 \\ 4 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{2\times5}$,$B_{5\times3}$,$C_{4\times6}$,$D_{4\times4}$,$E_{3\times4}$,$F_{5\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Алексеев Арсен Семенович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & -1 \\ 7 & 3 & 6 & -2 \\ 5 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{5\times5}$,$B_{5\times3}$,$C_{2\times2}$,$D_{5\times5}$,$E_{6\times6}$,$F_{5\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 6 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Владимирова Вероника Николаевна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 8 \\ 5 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 14 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 7 & 6 & 6 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times3}$,$B_{6\times3}$,$C_{2\times4}$,$D_{3\times3}$,$E_{4\times6}$,$F_{4\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Алексеев Алексей Александрович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

$$\mathbf{1.}\left(\begin{array}{cc|c}4&5&1\\3&4&1\end{array}\right)\quad \mathbf{2.}\left(\begin{array}{cc|c}3&4&-1\\5&7&1\end{array}\right)$$

$$\mathbf{3.}\left(\begin{array}{cc|c}2&3&2\\5&7&-2\end{array}\right)\quad \mathbf{4.}\left(\begin{array}{cc|c}5&7&2\\2&3&2\end{array}\right)$$

$$\mathbf{5.}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&2\\4&3&3&0\\3&6&7&2\end{array}\right)\quad \mathbf{6.}\left(\begin{array}{ccc|c}5&3&4&-1\\4&3&4&-1\\5&4&5&-2\end{array}\right)$$

$$\mathbf{7.}\left(\begin{array}{ccc|c}6&5&6&2\\5&4&4&1\\3&3&5&-2\end{array}\right)\quad \mathbf{8.}\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&5&1\\5&3&2&1\\3&2&6&2\end{array}\right)$$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

$$\mathbf{10.}\left(\begin{array}{cc|c}6&5&0\\4&6&-1\end{array}\right)\quad \mathbf{11.}\left(\begin{array}{cc|c}3&4&8\\6&5&10\end{array}\right)$$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

$$\mathbf{13.}\begin{pmatrix}3&3\\4&3\end{pmatrix}\quad \mathbf{14.}\begin{pmatrix}2&3\\3&3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{15.}\begin{pmatrix}2&2&0\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}\quad \mathbf{16.}\begin{pmatrix}3&2&4\\4&4&4\\2&1&1\end{pmatrix}$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\mathbf{17.}\left(\begin{array}{cc|c}3&7&0\\3&3&0\end{array}\right)\quad \mathbf{18.}\left(\begin{array}{cc|c}2&2&4\\3&6&12\end{array}\right)$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\mathbf{19.}\left(\begin{array}{ccc|c}3&6&5&0\\3&4&3&2\\6&5&3&-1\end{array}\right)$$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&0&1\\0&1&0&0&1&-1\\0&1&0&1&1&-2\\1&1&0&1&0&1\end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\mathbf{21.}\left(\begin{array}{ccc|c}3&4&5&-1\\4&5&5&0\end{array}\right)\quad \mathbf{22.}\left(\begin{array}{cc|c}5&10&15\\3&6&9\end{array}\right)$$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A=\begin{pmatrix}5&2&4\\6&2&4\\3&5&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&-2&1\\0&3&-1\end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times4}$,$B_{3\times4}$,$C_{6\times3}$,$D_{2\times4}$,$E_{2\times5}$,$F_{2\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

$$\mathbf{25.}\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\quad \mathbf{26.}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

Найдите обратные матрицы

$$\mathbf{27.}\begin{pmatrix}-1&3&-1\\0&2&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad \mathbf{28.}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&0\\0&-2&0\end{pmatrix}$$

Напишите с.л.у.

$$\mathbf{29.}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&-2\\5&3&-3\end{array}\right)\quad \mathbf{30.}\left(\begin{array}{cc|c}4&3&18\\4&3&18\end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\mathbf{31.}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&5&0\\7&2&6&1\end{array}\right)\quad \mathbf{32.}\left(\begin{array}{ccc|c}5&5&2&3\\5&3&3&2\end{array}\right)$$

$$\mathbf{33.}\left(\begin{array}{cccc|c}2&5&3&6&1\\7&6&5&5&1\end{array}\right)\quad \mathbf{34.}\left(\begin{array}{cccc|c}2&5&5&5&0\\4&5&2&4&0\\5&5&4&7&-1\end{array}\right)$$

$$\mathbf{35.}\left(\begin{array}{cccc|c}2&3&6&4&2\\6&2&4&6&3\\3&5&6&6&-1\end{array}\right)$$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Сокольникова Валентина Владимировна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

$$\textbf{1.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{2.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{3.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{4.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\textbf{5.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \textbf{6.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\textbf{7.}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right) \quad \textbf{8.}\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

$$\textbf{10.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{11.}\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

$$\textbf{13.}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{14.}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{15.}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{16.}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\textbf{17.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{array}\right) \quad \textbf{18.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\textbf{19.}\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 5 & -2 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\textbf{21.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{22.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times2}$,$B_{4\times5}$,$C_{4\times5}$,$D_{4\times4}$,$E_{3\times3}$,$F_{2\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

$$\textbf{25.}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{26.}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Найдите обратные матрицы

$$\textbf{27.}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{28.}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Напишите с.л.у.

$$\textbf{29.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{30.}\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\textbf{31.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 4 & -1 \\ 2 & 7 & 5 & -1 \end{array}\right) \quad \textbf{32.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\textbf{33.}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{34.}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\textbf{35.}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 5 & 5 & -2 \end{array}\right)$$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & -2 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & 5 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 4 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times5}, B_{5\times3}, C_{4\times4}, D_{2\times4}, E_{4\times3}, F_{4\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -10 \\ 4 & 3 & -8 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -8 \\ 1 & 5 & -10 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Алексеева Акулина Анатольевна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & -2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 10 \\ 6 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & -10 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times6}$,$B_{6\times3}$,$C_{2\times3}$,$D_{3\times3}$,$E_{5\times5}$,$F_{2\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 12 \\ 4 & 3 & 9 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 16 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 6 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Тайшин Егор Дмитриевич

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 10 \\ 6 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 10 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times4}$,$B_{4\times4}$,$C_{6\times4}$,$D_{2\times5}$,$E_{4\times2}$,$F_{2\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 2 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 14 \\ 7 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & 14 \\ 6 & 7 & 14 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times4}$,$B_{6\times4}$,$C_{2\times6}$,$D_{6\times5}$,$E_{4\times5}$,$F_{4\times4}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 10 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 7 & -1 \\ 4 & 6 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 5 & -2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Сергеев Александр Германович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 6 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & -2 \\ 7 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times5}$,$B_{4\times5}$,$C_{3\times6}$,$D_{5\times6}$,$E_{3\times6}$,$F_{5\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 15 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 7 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Уваровская Елена Игнатьевна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & -2 \\ 5 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 12 \\ 5 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 21 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times3}$,$B_{5\times2}$,$C_{2\times4}$,$D_{2\times6}$,$E_{4\times4}$,$F_{2\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 8 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Ефремова Сахая Алексеевна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 6 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 7 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 8 \\ 6 & 7 & 14 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & -2 \\ 6 & 6 & -3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times4}$,$B_{5\times5}$,$C_{3\times6}$,$D_{6\times5}$,$E_{3\times5}$,$F_{5\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -4 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 6 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Филиппова Татьяна Олеговна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 5 & -1 \\ 6 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times6}$,$B_{5\times4}$,$C_{5\times5}$,$D_{2\times4}$,$E_{2\times3}$,$F_{5\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -6 \\ 5 & 2 & -10 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & 2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Андреев Филипп Александрович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 4,5 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times6}, B_{5\times2}, C_{6\times2}, D_{5\times4}, E_{4\times4}, F_{3\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 15 \\ 4 & 3 & 12 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 10 \\ 6 & 1 & 2 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 7 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 4 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 5 & -2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Григорьева Екатерина Петровна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & -2 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 14 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -14 \\ 3 & 6 & -21 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times5}$,$B_{4\times4}$,$C_{3\times3}$,$D_{2\times2}$,$E_{2\times5}$,$F_{5\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & 10 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 9 \\ 5 & 5 & 15 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Прокопьев Айаал Алексеевич

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 12 \\ 6 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times6}, B_{5\times2}, C_{3\times4}, D_{3\times3}, E_{2\times4}, F_{2\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -9 \\ 3 & 2 & -5 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 7 & 2 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & 4 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Петрова Саргылана Артуровна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 14 & 6 \\ 6 & 21 & 9 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times4}$,$B_{4\times3}$,$C_{4\times6}$,$D_{4\times5}$,$E_{3\times3}$,$F_{4\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 4 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 7 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 6 & 6 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 4 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & 7 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 12 \\ 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times3}$,$B_{5\times4}$,$C_{6\times3}$,$D_{5\times4}$,$E_{4\times3}$,$F_{3\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 6 & 14 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & -5 \\ 4 & 4 & -4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 6 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Могусов Александр Михайлович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 14 \\ 6 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 12 \\ 6 & 7 & 14 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times3}$,$B_{2\times3}$,$C_{4\times6}$,$D_{6\times6}$,$E_{5\times4}$,$F_{3\times4}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -4 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 3 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times5}$,$B_{5\times3}$,$C_{4\times5}$,$D_{4\times3}$,$E_{2\times6}$,$F_{3\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 3 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 6 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

Календарно-тематический план

с отражением СРС на 2010-2011 уч. год

I семестр

№	ТЕМЫ	л.з.	и.з.
1-4	Перестановки и подстановки	8	2
5	С/р по теме "Перестановки и подстановки"	2	
6-7	Определители 1-го и 2-го порядка. Их вычисление и применение. Определители n-го порядка и их свойства. Миноры и их алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке или столбцу. Теорема Лапласа. Правило Крамера.	4	2
8-9	Методы вычисления определителя n-го порядка. Определитель Вандермонда.	4	
10	К/р	2	
11-13	Поле комплексных чисел. Геометрическое представление комплексных чисел и операции над ними. Тригонометрическая форма комплексного числа. Корни из комплексного числа.	6	2
14	К/р	2	
15-16	Универсальные алгебры.	4	2
17-20	Матрицы. операции над матрицами и их свойства. Элементарные матрицы. Представление матрицы в виде произведения элементарных матриц. Обратимые матрицы. условие обратимости матрицы. вычисление обратной матрицы (2 метода). Решение матричных уравнений.	8	2
21	К/р	2	
22-25	Системы линейных уравнений и элементарные преобразования. Метод Гаусса. ОТТСЛУ. Системы однородных, неоднородных линейных уравнений. Критерий совместности линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.	8	2
26	К/р	2	
27	Сводная к/р	2	

Календарно-тематический план

с отражением СРС на 2010-2011 уч. год

II семестр

№	ТЕМЫ	лекции
1-2	Понятие n-мерного векторного пространства. Линейная зависимость системы векторов. Базис и ранг системы векторов.	4ч
3	Аксиоматическое определение линейного пространства, базис и размерность пространства. Изоморфизм линейных пространств.	2ч
4	Подпространства линейных пространств. Линейное многообразие. Линейная оболочка множества векторов.	2ч
5	Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств.	2ч
6-7	Линейные преобразования линейных пространств. Матрица линейного преобразования. Связь между матрицами линейного преобразования в разных базах. Теорема о том, что существует единственное линейное преобразование переводящее линейно независимые векторы a_1, a_2, …, a_n в произвольные векторы b_1, b_2, …, b_n соответственно. Действия над линейными преобразованиями.	4ч
8	Ядро и область значений линейного преобразования. Теорема о том, что образы и прообразы линейных пространств опять являются линейными пространствами. Теорема о том, что сумма ранга и дефекта линейного преобразования равна размерности пространства. Теорема о ранге произвольного линейного преобразования.	2ч
9-10	Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Линейные преобразования с простым спектром. Достаточные условия приводимости матрицы линейного преобразования к диагональному виду. Спектр линейного преобразования. Линейные преобразования с простым спектром.	4ч
11	Унитарные и Евклидовы пространства.	2ч
12	Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Дополнение ортогональной системы векторов до ортогонального базиса, процесс ортогонализации. Теорема о том, что всякая ортогональная система векторов является линейно независимой.	2ч
13	Ортогональное дополнение к подпространству. Теорема о представлении евклидова пространства в виде прямой суммы подпространства L и его ортогонального дополнения. Норма вектора. Ортонормированный базис евклидова пространства.	2ч
14	Изоморфизм евклидовых пространств одинаковой размерности.	2ч
15-17	Ортогональные матрицы и их свойства. Ортогональные преобразования евклидовых пространств, симметрические преобразования евклидовых пространств и их свойства.	6ч
18	Приведение квадратичных форм к главным осям. Пары форм.	2ч

Календарно-тематический план

с отражением СРС на 2010-2011 уч. год

III семестр

№	ТЕМА	Часы	Дата
1	Определения группы. Их равносильность. Примеры. Порядок группы.	2	
2	Отображения групп. Изоморфизм групп. Примеры.	2	
3	Возведение в целую степень элементов группы. Порядок элемента. Утверждения о нем. Понятие подгруппы. Критерий определения подгрупп. Примеры.	2	
4	Теорема Кэли. Таблица Кэли для групп. Свойства расположения элементов группы в таблице Кэли. Примеры.	2	
5	Циклические подгруппы и группы. Теорема о подгруппах циклических групп. Примеры.	2	
6	Смежные классы по подгруппе. Свойства. Индекс подгруппы в группе.	2	
7	Инвариантные подгруппы. Фактор-группа по инвариантной подгруппе. Примеры. Классы сопряженных элементов. Свойства.	2	
8	Гомоморфизмы групп. Свойства гомоморфизма. Теорема о ядре гомоморфизма. Гомоморфизм группы на фактор-группу. Теорема о гомоморфизмах.	2	
9	Нормализатор элемента. Теорема о порядке класса сопряженности. Центр группы. Свойства. Примеры.	2	
10	Коммутатор пары элементов и его свойства. Строение коммутанта. Инвариантность коммутанта. Утверждение о коммутанте абелевых групп. Примеры.	2	
11	Теорема Галуа о простоте группы A_5. Следствия. Неразрешимые группы и неразрешимость уравнения в радикалах.	2	
12	Декартово произведение групп. Утверждения о них. Критерий разложимости группы в произведение групп меньшего порядка.	2	
13	Конечные абелевы группы. Примеры.	2	
14	Теорема о цикличности или разложимости абелевых р-групп. Основная теорема об абелевых группах.	2	
15	Группы симметрий правильных многогранников	2	
ВСЕГО		**32**	

Перечень методических разработок по СРС

1. Конспект лекций, электронная книга, опубликована на yktmath.narod.ru/ysu

2. Индивидуальные задания по алгебре для СРС, электронная книга, опубликована на yktmath.narod.ru/ysu

График консультаций

Каждый четверг, после 14.00 на кафедре.

Консультации проводятся по темам:

Универсальные алгебры. СРС, 8 час

Ядро и область значений линейного преобразования. СРС, 8 час

Гомоморфизмы групп. СРС, 8 час

Неразрешимые группы и неразрешимость уравнения в радикалах. СРС, 8 час

Группы симметрий правильных многогранников. СРС, 8 час

Анализ равномерности

СРС распределены равномерно

Анализ соответствия

Часы СРС соответствуют часам рабочей программы

Шамаев Э.И.

Конспект лекций по курсу «Геометрия и алгебра»

Алгебра

Якутск, 2009

Опубликовано на сайте http://yktmath.narod.ru

1 Системы линейных уравнений

1.1 Что такое с.л.у.?

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — некоторые действительные числа; x_1, x_2, $\ldots$, x_n — некоторые символы. Тогда для каждого натурального n выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

называется линейным уравнением. Символы x_1, x_2, $\ldots$, x_n мы будем называть переменными или неизвестными.

Рассмотрим m линейных уравнений, которые нужно решить одновременно:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{1}$$

Определение 1 *Выражение (1) называется системой m линейных уравнений с n неизвестными. Набор из n чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется решением с.л.у., если при подстановке этого набора в с.л.у. вместо неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ все уравнения станут верными равенствами. Множество всех решений с.л.у. называется множеством решений с.л.у. Если с.л.у. имеет хотя бы одно решение, то с.л.у. называется совместной, иначе с.л.у. называется несовместной. Множество решений несовместной с.л.у. называется пустым.*

Совместная система называется определенной, если множество решений с.л.у. имеет единственное решение, и неопределенной, если множество решений с.л.у. имеет бесконечно много решений.

Если множества решений систем линейных уравнений совпадают, то эти с.л.у. называются эквивалентными.

Далее вместо (1) будем писать следующее выражение для краткости.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2}$$

Можно сказать, что весь семестр мы будем исследовать с.л.у. Вопросы, которые нас интересуют: *как находить решения с.л.у.?* и *когда с.л.у. разрешима?.*

Чтобы ответить на этот вопрос мы введем понятия матрицы, определителя матрицы, векторного пространства, векторного подпространства, линейной зависимости, размерности, фундаментальной системы решений и т.д.

Для решения с.л.у. часто используют *методы исключения неизвестных* или *метод Гаусса.* В этих методах шаг за шагом выражают неизвестную через другие и исключают из системы уравнений.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Является ли несовместная с.л.у. эквивалентной уравнению $x_1^2 = -1$?

2. Как измениться (2), если второе уравнение умножить на 2?

3. Как измениться (2), если первое и второе уравнения поменять местами?

4. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right).$$

1.2 Как решать с.л.у.? — метод Гаусса

1.2.1 Элементарные преобразования

Ознакомимся с тремя элементарными преобразованиями с.л.у., с помощью которых мы сможем упростить любую с.л.у. до очевидного вида.

Лемма 1 (1-е элементарное преобразование) *При перестановке местами уравнений с.л.у. останется эквивалентной прежней.*

◀ Пусть A — множество решений старой с.л.у., B — новой с.л.у. Ясно, что $A \subseteq B$ и также очевидно $A \supseteq B$. Тогда $A = B$ ▶

Аналогичное доказательство имеет следующая лемма

Лемма 2 (2-е элементарное преобразование) *При умножении уравнения на ненулевое число с.л.у. останется эквивалентной прежней.*

Более содержательным является последняя лемма об элементарных преобразованиях

Лемма 3 (3-е элементарное преобразование) *Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ следующие с.л.у. эквивалентны*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+\lambda a_{l1} & a_{k2}+\lambda a_{l2} & \dots & a_{kn}+\lambda a_{ln} & b_k+\lambda b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (3)$$

◀ Пусть A — множество решений первой с.л.у., B — второй с.л.у.

Рассмотрим произвольную $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$. При подстановке этого набора чисел во вторую с.л.у. для всех строках, кроме k-й, равенства очевидно верны. Рассмотрим левую часть k-го равенства. После перегруппировки слагаемых это выражение равно $(a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \dots + a_{kn}x_n^0) + \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \dots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна b_k, вторая b_l. Следовательно, все это выражение равно $b_k + \lambda b_l$. Таким образом, k-ое выражение второй с.л.у. является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in B$. Это означает, что $A \subseteq B$.

Рассмотрим произвольную $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in B$. При подстановке этого набора чисел в первую с.л.у. равенство k-й пока не очевидно. Рассмотрим левую часть этого равенства. После перегруппировки слагаемых рассматриваемое выражение равно $\big[(a_{k1}+\lambda a_{l1})x_1^0 + (a_{k2}+\lambda a_{l2})x_2^0 + \dots +$

$(a_{kn} + \lambda a_{ln})x_n^0\big] - \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна $b_k + \lambda b_l$, вторая b_l. Следовательно, все это выражение равно b_k. Таким образом, k-ое выражение первой с.л.у. является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in A$. Это означает, что $B \subseteq A$.

Итого, из $A \subseteq B$ и $A \supseteq B$ следует $A = B$ — эквивалентность этих с.л.у. ▶

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right). \tag{4}$$

2. Можно ли элем. преобр-ми избавится от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме одной?

3. Можно ли элементарными преобразованиями несовместной с.л.у. получить совместную?

4. Можно ли применять элементарные преобразования к столбцам с.л.у.?

1.2.2 Описание метода Гаусса решения систем уравнений

Рассмотрим с.л.у. из m уравнений и n переменных.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{5}$$

1) Прямой ход метода Гаусса.

а) Среди коэффициентов первого столбца имеется ненулевой, иначе переменная x_1 отсутствует в с.л.у. и x_1 может принимать любое значение. Такие переменные называются *свободными переменными.*

б) Выберем среди коэффициентов первого столбца ненулевой a_{k1} и назовем *ведущим.*

в) Поменяем 1-ю и k-ю строки местами. Выпишем полученную с.л.у.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \ldots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right). \tag{6}$$

г) Из каждой i-ой строки ниже ведущего элемента вычтем 1-ю строку, умножив на a'_{i1}/a'_{11}.

Таким образом, мы избавимся от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме первого уравнения. Далее решаем систему линейных уравнений без первого уравнения и столбца.

Продолжая прямой ход Гаусса, в конце получим с.л.у. *ступенчатого вида.*

$$1^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) \end{array}, \quad 2^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \end{array}, \quad 3^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

В случае 1° свободная переменная — x_4; в 2° свободная переменная — x_3; в 3° свободные переменные — x_3 и x_4.

2) Обратный ход метода Гаусса.

Если одно из уравнений имеет вид $(0\ 0\ 0\ \dots\ 0 \mid c\ )$, где $c \neq 0$, то это уравнение $0 = c$ не имеет решения. Тогда не имеет решение и с.л.у. Иначе с.л.у. совместна и множество ее решений найдем после обратного хода Гаусса.

Пусть имеется k нетривиальных уравнений в ступенчатом виде с.л.у. Пусть переменные, не являющиеся свободными, имеют индексы $i_1, i_2, \dots, i_k$.

а) Из самого нижнего уравнения мы выразим x_{i_k} через b_{i_k} и свободные переменные.

Теперь при рассмотрении $(k-1)$-го уравнения x_{i_k} можно заменить через число и свободные переменные.

Продолжая это действие, мы выразим все переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ через свободные переменные и некоторые числа.

При любых значениях свободных переменных мы будем получать новое решение с.л.у.

С.л.у. имеет единственное решение, если она совместна и не имеет свободных переменных.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right). \tag{7}$$

2. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 29 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 22 \end{array}\right).$$

1.3 Когда с.л.у. имеет единственное решение?

1.3.1 Определитель матрицы 1×1

Приведем очевидные утверждения.

Теорема 1 (Критерий существования единственного решения) *Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственное решение.*

Теорема 2 (Вырожденный случай) *Если $a = 0$, то уравнение $ax = b$, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.*

1.3.2 Определитель матрицы 2×2

Рассмотрим систему линейных уравнений из двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{8}$$

Считаем, что каждое из уравнений имеет хотя бы одну переменную, т.е. хотя бы один из коэффициентов a_{11} и a_{12} не равен нулю, и хотя бы один из коэффициентов a_{21} и a_{22} не равен нулю. Тогда каждое из уравнений задает прямую на плоскости с координатами x и y.

Рассмотрим случай $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x + \dfrac{b_1}{a_{12}}; \\ y = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x + \dfrac{b_2}{a_{22}}. \end{cases} \tag{9}$$

Если угловые коэффициенты $-\dfrac{a_{11}}{a_{12}} \neq -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}$, то данные прямые не являются параллельными. Не параллельные прямые имеют единственное пересечение [1].

Параллельные прямые либо не имеют точки пересечения, либо совпадают и тогда с.л.у. имеет бесконечно много решений.

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем системы (8). Поскольку определитель зависит только от коэффициентов левой части с.л.у., то всегда пишут так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Из всех рассуждений мы делаем следующий вывод.

Теорема 3 (Критерий существования единственного решения) *Если определитель системы линейных уравнений из 2 уравнений с 2 неизвестными не равен нулю, то эта система имеет единственное решение.*

Иначе система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

◀ Таким образом, при $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$ критерием существования единственного решения является условие $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Другие возможные случаи: $a_{12} = 0$ и $a_{22} = 0$; $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} = 0$; $a_{12} = 0$ и $a_{22} \neq 0$.

В первом случае мы имеем прямые параллельные оси ординат и определитель равен нулю.

Во втором случае вторая прямая параллельна оси ординат, первая — нет. Тогда определитель не равен нулю и прямые не параллельны.

В третьем случае первая прямая параллельна оси ординат, вторая — нет. Тогда определитель не равен нулю и прямые не параллельны.

Таким образом, во всех случаях с.л.у. (8) имеет единственное решение только в случае $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ▶

1.4 Определитель матрицы $n \times n$

Для определения понятия определителя матриц $n \times n$ нам понадобится каждой строке поставить в соответствие столбец.

Определение 2 *Выпишем в таблицу номера строк и ниже номера столбцов:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

где $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \{1, 2, \dots n\}$. *Такие таблицы называются подстановками из* n *элементов. Далее будем считать, что* $\sigma 1 = t_1$, $\sigma 2 = t_2$, $\dots$, $\sigma n = t_n$.

Заметим, что номера столбцов (числа второй строки подстановки) не повторяются.

Пример подстановки: $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ — не подстановка.

Из определения следует, что $\mu 1 = 3$, $\mu 2 = 1$, $\mu 3 = 2$ и $\mu 4 = 4$.

Множество всех подстановок из n элементов обозначается через S_n.

Лемма 4 *Число всех подстановок степени* n *равно* $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$

◀ Построим произвольную подстановку n-ой степени. Выберем произвольный t_1. Это можно сделать n различными способами. Затем выберем t_2 из множества $\{1, 2, .., n\}$ без t_n. Этот выбор можно сделать $n - 1$ способом. Продолжим процесс выбора элементов. При выборе последнего элемента t_n останется единственный вариант. Таким образом, число вариантов выбора подстановки равно $n \cdot (n-1) \cdot .. \cdot 2 \cdot 1$ ▶

Рассмотрим произвольную подстановку (3) из n элементов. Говорят, что числа t_k и t_m составляют *инверсию,* если $t_k < t_m$ и t_k стоит правее t_m. *Четностью подстановки* σ называют четность числа инверсий в нем.

Определим функцию знака подстановки

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ четная,} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Определение 3 *Произведением подстановок*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

назовем следующую подстановку

$$\sigma\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_{t_1} & s_{t_2} & \dots & s_{t_n} \end{pmatrix}.$$

Лемма 5 *Для любых подстановок σ и ρ верно равенство*

$$sgn\, \sigma\rho = sgn\, \sigma\, sgn\, \rho.$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Определите четность подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

2. Найдите $\sigma 3$, $\rho 5$, $\mu 4$. **3.** Найдите произведения подстановок $\sigma\rho$ и $\mu\sigma$.

4. Найдите обратные подстановки σ^{-1}, ρ^{-1} и μ^{-1}.

5. Существует ли подстановка из четырех элементов без инверсий? Существует ли подстановка из пяти элементов с 10 инверсиями?

1.4.1 Первое определение

Определение 4 *Определителем матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется выражение

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\sigma\, a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma n},$$

где суммирование ведется по всевозможным подстановкам $\sigma \in S_n$.

Случай $n = 2$. Число подстановок равно по лемме 4 равно $2! = 2$. Выпишем все эти подстановки со знаками.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Случай $n = 3$. Число подстановок S_3 равно 6. Выпишем все эти подстановки со знаками

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

1.4.2 Второе определение

Определение 5 *Определителем квадратной матрицы A размером $n \times n$ называется сумма всевозможных правильных произведений, где правильным произведением называется произведение n элементов матрицы на разных строках и столбцах и знака подстановки индексов* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите определители матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 10 \\ 1 & \dots & 1 & 100 & 1 \\ 1 & \dots & 1000 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10^n & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

1.4.3 Свойства определителей

Транспонированной матрицей матрицы a_{ij} называют матрицу a_{ji}. Обозначается как A^T. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Свойство 1 *Для любой квадратной матрицы A выполнено*

$$\det A = \det A^T.$$

◀ Справедливы равенства

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{1\sigma 1} \dots a_{n\sigma n} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{\sigma^{-1}11} \dots a_{\sigma^{-1}nn} = \det A^T.$$

Суммы равны, поскольку слагаемые равны (по лемме 5 верно $\operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma^{-1} = 1$) ▶

Свойство 2 *Если строка матрицы A состоит из нулей, то* $\det A = 0$.

Свойство 3 *При перестановке местами двух строк матрицы определитель меняет знак.*

◀ Пусть $\tau = (rs)$ транспозиция, меняющая местами элементы r и s. Понятно, что $\tau^{-1} S_n = \{\tau^{-1}\sigma | \sigma \in S_n\} = S_n$.

$$\det(b_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{11\sigma} .. a_{rr\sigma} .. a_{ss\sigma} .. a_{nn\sigma}$$

$$= \sum_{\tau\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \tau\sigma a_{11\tau\sigma} .. a_{rr\tau\sigma} .. a_{ss\tau\sigma} .. a_{nn\tau\sigma} = \sum_{\sigma \in \tau^{-1} S_n} -\operatorname{sgn} \sigma a_{11\sigma} .. a_{nn\sigma} = \det(a_{ij}).$$

Последнее равенство выполнено в силу выбора τ. ▶

Свойство 4 *Если матрица A содержит одинаковые строки, что* $\det A = 0$.

Свойство 5 *Если строку матрица A умножить на λ, то $\det A$ возрастет в λ раз.*

Свойство 6 *Если матрица A содержит пропорциональные строки, что* $\det A = 0$.

Свойство 7 *Пусть $A_i(v)$ — матрица, где с i-ая строка заполнена набором чисел v.*
Тогда $\det A_i(v) + \det A_i(w) = \det A_i(v + w)$.

◀ $\det(c_{ij}) =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .. c_{ss\sigma} .. c_{nn\sigma} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... (a_{ss\sigma} + b_{ss\sigma}) .. c_{nn\tau\sigma} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... a_{ss\sigma} .. \sigma c_{nn\sigma} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... b_{ss\sigma} .. c_{nn\sigma} =$$

$$\det(a_{ij}) + \det(b_{ij}). \ \blacktriangleright$$

Свойство 8 *Если одна из строк матрицы A является линейной комбинацией, то* $\det A = 0$.

Свойство 9 *Если строке матрицы A прибавить линейную комбинацию других строк, то определитель не изменится.*

Свойство 10

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdot .. \cdot \lambda_n.$$

Замечание. Из первого свойства следует, что все эти утверждения справедливы и для столбцов.

Матрицу с нулевым определителем называют вырожденной.

Определение 6 *Выберем в матрице A по k произвольных строк и столбцов. Из элементов стоящих на пересечении этих строк и столбцов можно составить новую матрицу, которую называют подматрицей A. Определитель подматрицы A называется минором.*

Выбросим из матрицы A строку с номером i и столбцом j. Определитель полученной подматрицы называется минором элемента a_{ij}. Обозначается через M_{ij}. Выражение $(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ назывется алгебраическим дополнением. Обозначается через A_{ij}.

Лемма 6 *Если матрица содержит строку, состоящую из единственного ненулевого элемента a_{ij}, то определитель этой матрицы равен произведению этого элемента и ее алгебраического дополнения. Другими словами, справедливо равенство*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{ij}A_{ij}. \tag{11}$$

◀ Последовательно меняем i-ую строку со всеми последующими строками и j-ый столбец со всеми последующими столбцами. По свойству 3 знак определителя изменится $n-i+n-j = 2n-(i+j)$ раз. Четность числа $2n-(i+j)$ совпадает с четностью $i+j$.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j}a_{ij}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Вынесем a_{ij} за пределы определителя по свойству 5.

Покажем, что полученная матрица имеет определитель равный M_{ij}. Введем преообозначение

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n-1} & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n-1,1} & \dots & a'_{n-1,n-1} & a'_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ — подстановка индексов произвольного ненулевого правильного произведения матрицы (13). Выпишем это произведение

$$\operatorname{sgn}\sigma a'_{1\sigma 1}\cdot a'_{2\sigma 2}\cdot\ldots\cdot a'_{n-1\sigma n-1}\cdot 1. \tag{14}$$

Ясно, что $\sigma n = n$.

Пусть $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix}$. Тогда число инверсий μ и σ совпадают. Следовательно, $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\mu$.

Теперь ясно, что слагаемое минора $\operatorname{sgn}\mu a'_{1\mu 1}\cdot a'_{2\mu 2}\cdot\ldots\cdot a'_{n-1\mu n-1}$ совпадает с (14).

Таким образом, (12) равен $a_{ij}A_{ij}$ ▶

Теорема 4 (Лапласа) *Определитель матрицы можно разложить по строке следующим образом:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \text{ для любой строки } i,$$

или разложить по столбцу:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \text{ для любого столбца } j.$$

◀ По свойству 7 справедливо разложение:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{i2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По лемме 6 каждое k-ое слагаемое в полученной сумме равно $a_{ik}A_{ik}$. ▶

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & 1 & 2 & \ldots & -1+n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \ldots & n^2 \\ 1 & 2 & 9 & \ldots & n^2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2 & \sin 3 & \ldots & \sin n \\ 1 & 2 & \sin 3 & \ldots & \sin n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & \sin n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{pmatrix}.$$

3. Найдите определители матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \ldots & 2 \\ 2 & 3 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & \ldots & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

4. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 27 & \ldots & 3^n \\ 3 & 3 & 27 & \ldots & 3^n \\ 3 & 9 & 9 & \ldots & 3^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 3 & 9 & 27 & \ldots & 3^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 20 & \ldots & 20 & 20 & 20 \\ 0 & \ldots & 0 & x & -x \\ 0 & \ldots & x & -x & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \ldots & 1 & 4 & 1 \\ 1 & \ldots & 6 & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2n & \ldots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \dots & 2^n \\ 2 & 2 & 8 & \dots & 2^n \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 5 & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 4 & \dots & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & \dots & 5 & 5 & 10 \\ 5 & \dots & 5 & 10 & 5 \\ 5 & \dots & 10 & 5 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10 & \dots & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1.5 Примеры вычисления определителей матриц $n \times n$

1.5.1 Приведение к треугольному виду

Лемма 7 *При попарной перестановке строк матрицы A знак определителя изменится на* $(-1)^{[\frac{n}{2}]}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{[\frac{n}{2}]} \det \begin{pmatrix} a_{1n} & \dots & a_{12} & a_{1n} \\ a_{2n} & \dots & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & a_{n2} & a_{n1} \end{pmatrix}$$

◀ При четном n достаточно $\frac{n}{2} = [\frac{n}{2}]$ перестановок, при нечетном n — $\frac{n-1}{2} = [\frac{n-2}{2}]$ ▶

1.5.2 Рекуррентные соотношения

Лемма 8 *Пусть*

$$I_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad I'_{n-1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда определитель I_n удовлетворяет рекуррентному соотношению $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$ и начальному условию $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$.

◀ Разложим I_n по первой строке по Лапласу: $I_n = 2I_{n-1} - 3I'_{n-1}$. В свою очередь I'_{n-1} разложим по первому столбцу: $I'_{n-1} = I_{n-2}$. Тогда $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$. Равенства $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$ легко проверяются прямыми вычислениями. ▶

1.5.3 Определитель Вандермонда

Лемма 9 *Верно равенство*

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) = D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

◀ Вычтем первую строку из каждой k-й строки ниже, умножим на x_1^{k-1}. В результате обнулим первый столбец ниже элемента 1. В результате разложения определителя по первому столбцу достаточно найти определитель

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n} (x_i - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 + x_1 & \dots & x_n + x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{k-2}(x_2, x_1) & \dots & Q_{k-2}(x_n, x_1) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $a^k - b^k = (a-b)Q_{k-1}(a,b)$, где $Q_{k-1}(a,b) = a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}$.

Из равенства $Q_{k-1}(a,b) - bQ_{k-2}(a,b) = a^{k-1}$ следует, что вычитая из каждой строчки

▶

1.6 Матрица и операции над матрицами

Матрица над полем вещественных чисел размерности $m \times n$ — таблица составленная из m строк и n столбцов заполненная вещественными числами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Обозначается через $(a_{ij})_{m\times n}$.

Если элементы матрицы (15) совпадают с коэффициентами с.л.у. (5), то матрицу (15) называют *матрицей с.л.у.* (5). Следующую матрицу называют *расширенной матрицей с.л.у.* (5)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & \dots & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{16}$$

Матрицы одинаковой размерности можно *суммировать*:

$$(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Любую матрицу можно *умножить на число*: $\lambda(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Умножение определено для матриц $(a_{ij})_{m\times n}$ и $(b_{ij})_{r\times s}$, если число столбцов n первого сомножителя равно числу строк r второго сомножителя:

$$(c_{ij})_{m\times s} = (a_{ij})_{m\times n} \cdot (b_{ij})_{n\times s}, \text{ где } c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}. \tag{17}$$

Следующие свойства суммирования матриц следуют из свойств вещественных чисел:

1) Для любых $(n \times m)$-матриц A, B, C справедливо $A + (B + C) = (A + B) + C$.

2) Для любых $(n \times m)$-матриц A, B $A + B = B + A$.

3) Для любой A матриц $n \times m$ $A + B = B + A$.

Свойства произведения матриц:

1) Для матриц A, B, C подходящих размеров $A(BC) = (AB)C$.

2) Существуют матрицы A, B такие, что $AB \neq BA$.

Свойства дистрибутивности матриц: 1) Для матриц A, B, C подходящих размеров

$$A(B + C) = AB + AC.$$

1.6.1 Матрицы специального вида

Матрица называется *квадратной,* если число ее строк равно числу столбцов.

Диагональю квадратной матрицы $(a_{ij})_{n\times n}$ называются элементы матрицы a_{ii}, $i = \overline{1, n}$.

Диагональной матрицей называется матрица с нулевыми элементами вне диагонали. Обозначается как

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где $a_{ii} = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$.

Матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной.* Легко проверить,что произведение любой квадратной матрицы A на единичную матрицу соответствующей размерности равно самой матрице $A = AE = EA$. Элементы единичной матрицы обозначают, как

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Теорема 5 *Для любых квадратных матриц справедливо равенство*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

1.6.2 Матричная запись с.л.у.

Теперь любую систему л.у. вида (1) можно представить в виде равенства матрицы b с произведением матриц A и b.

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Проверьте правильность сказанного выше утверждения.

2. Во сколько раз меньше символов требуется, чтобы записать уравнение в матричном виде?

3. Что такое "деление матрицы на матрицу"?

1.6.3 Обратные матрицы

Определение 7 *Матрица B такая, что $AB = BA = E$ называется обратной матрицей матрицы A. Обозначается через A^{-1}.*

Невырожденным называется квадратная матрица с ненулевым определителем.

Теорема 6 *Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ невырожденная квадратная матрица.*

Тогда матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

является обратной матрицы A.

◀ Пусть $(c_{ij})_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n} \times (\frac{A_{ji}}{\det A})_{n\times n}$. Докажем, что $c_{ij} = \delta_{ij}$.

Рассмотрим $c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. По теореме Лапласа сумма $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ является разложением определителя матрицы с двумя совпадающими строками, если $i \neq j$; и матрицы A, если $i = j$ ▶

Мы показали, что каждая невырожденная матрица имеет обратную матрицу. Из теоремы 5 следует, что вырожденные матрицы не имеют обратных.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Покажите, что вырожденные матрицы не имеют обратных.

2. Покажите, что $A^{-1}b$ является решением уравнения $Ax = b$.

3. Напишите с.л.у.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 13 & 6 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью нахождения обратной матрицы.

4. Приведите пример уравнения $Ax = b$, которое не имеет решения bA^{-1}.

1.7 Формула Крамера

Теорема 7 (Крамер) *Рассмотрим систему линейных уравнений* $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ & .. & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$$

с невырожденной квадратной матрицей A. *Пусть* A_i *получена из* A *заменой* i*-го столбца столбцом свободных членов.*

Тогда система $Ax = b$ *имеет единственной решение:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, \frac{\det A_n}{\det A} \right).$$

◀ Докажем справедливость формулы Крамера. Матрица $A^{-1}b$ размерности $n \times 1$ является решением с.л.у. Используя предыдущую теорему, получим решение

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ji}}{\det A} b_i, \text{ для } j = \overline{1, n}.$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} A_{ji} b_i$ является разложением определителя матрицы A_j по j-му столбцу — столбцу свободных членов.

Докажем единственность решения. Пусть сущестует еще одно решение x'. Тогда

$$x' = A^{-1}Ax' = A^{-1}b = x \quad ▶$$

Экзаменационные вопросы по "Геометрии и алгебре" (алгебра)
ПМ-09. 1 курс, 2 семестр. ***http://yktmath.narod.ru***

1. Определение комплексных чисел и операций над ними. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: аргумент комплексного числа, модуль комплексного числа, существование тригонометрической формы, сложение и умножение комплексных чисел.

2. Вычисление аргумента комплексного числа. Формула вычисления степени комплексных чисел и формула Муавра. Корни многочлена $z^n = 1$.

3. Многочлен. Степень многочлена. Приведенный многочлен. Свободный и старший члены многочлена. Произведение многочленов. Леммы о степени многочлена.

4. Деление с остатком многочленов. Неполное частное и остаток. Теорема о существовании неполного частного при делении многочленов (деление уголком).

5. Наибольший общий делитель многочленов. Лемма о равенстве НОД. Алгоритм Евклида.

6. Корень многочлена. Основная теоремы алгебры.

7. Теорема Безу. Кратность корня. Следствия основной теоремы.

8. Теорема Виета. Теорема о целых корнях. Теорема о рациональных корнях.

9. Рациональные дроби. Теорема о разложении рациональной дроби.

10. Векторное пространство. Примеры.

11. Система векторов. Линейная комбинация векторов. Тривиальная и нетривиальная линейная комбинация. Линейная независимость и зависимость системы векторов. Критерий линейной зависимости векторов. Алгоритм выяснения линейной зависимости векторов.

12. Базис векторного пространства. Размерность векторного пространства. Координаты вектора. Существование и единственность координат вектора.

13. Теорема о матрице перехода от базиса к базису.

14. Линейная оболочка векторов. Лемма о том, что любая линейная оболочка векторов является векторным подпространством.

15. Биекция. Сохранение операций. Изоморфизм векторных пространств. Теорема об изоморфизме любого конечномерного векторного пространства некоторому пространству $\mathbb{R}^n$.

16. Векторное подпространство. Критерий подпространства. Примеры подпространств различных векторных пространств.

17. Однородная и неоднородная системы линейных уравнений. Теорема о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений является линейным подпространством. Фундаментальная система решений. Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений.

18. Линейное многообразие с вектором сдвига и направляющим пространством. Теорема о том, что множество решений неоднородной системы линейных уравнений является линейным многообразием.

19. Операции над векторными подпространствами: суммирование, пересечение и ортогональное дополнение. Теорема об ортогональном дополнении и решениях однородной системы линейных уравнений.

20. Прямая сумма подпространств. Теорема о размерности суммы векторных подпространств. Лемма о дополнении базиса векторного подпространства до базиса всего пространства.

21. Теорема о выражении пересечения подпространств через ортогональное дополнение.

22. Операции над системами векторов, не влияющие на линейную зависимость.

23. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Длина (норма) вектора, угол между векторами, проекция вектора на вектор. Теорема о выражении проекции вектора на вектор через скалярное произведение.

24. Ортонормированный базис. Алгоритм ортогонализации Грамма-Шмидта. Нормирование вектора. Разложение матрицы на произведение ортогональной и треугольной матрицы.

25. Проекция вектора на линейную оболочку векторов. Теорема о кратчайшем расстоянии от точки до линейной оболочки векторов.

26. Линейные преобразования (операторы). Основное свойство. Следствие о задании линейного преобразования квадратной матрицы. Образ нулевого вектора.

27. Собственное число и собственный вектор линейного преобразования. Характеристический многочлен. Вычисление характеристического многочлена с помощью главных миноров.

28. Жорданова клетка. Жорданова нормальная форма матрицы. Теорема о матрице линейного преобразования с n собственными векторами.

29. Квадратичная форма. Канонический вид квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы. Алгоритм приведения произвольной квадратичной формы к каноническому виду.

30. Основная теорема о квадратичных формах.

31. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности квадратичной формы. Главные угловые миноры. Критерий Сильвестра.

2 Комплексные числа

Чтобы определить комплексные числа введем обозначение i, обладающее свойством $i^2 = -1$. Выражения вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ будем называть компле́ксными числами. Множество всех таких чисел обозначим $\mathbb{C}$. Сложение и умножение комплексных чисел $z = a + bi$, $w = c + di$ определим следующим образом:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i, \quad z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение определены аналогично операциям для многочленов с учетом $i^2 = -1$. Основная причина потребности в таких числах — основная теоремы алгебры, которую докажем позже. Кроме этого, существует естественный процесс "расширения" чисел:

Натуральные числа $\mathbb{N}$, если потребовать существование противоположных элементов, расширяется с помощью -1. Получаются целые числа $\mathbb{Z}$. Натуральные числа $\mathbb{Z}$, если потребовать существование обратных элементов, расширяется с помощью чисел вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Получаются рациональные числа $\mathbb{Q}$. Натуральные числа $\mathbb{Q}$, если потребовать непрерывность, имеют расширение действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$. Действительные числа $\mathbb{R}$, если потребовать существование корней для любых многочленов, имеют расширение комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Найдем противоположную и обратную комплексного числа $z = a + bi$. Ясно, что противоположным z является $-a - bi$. Действительно, $a + bi + (-a - bi) = (-a - bi) + a + bi = 0$.

Обратным z является $\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$. Действительно, $(a + bi)\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}(a + bi) = 1$.

Таким образом,

$$(a + bi) : (c + di) = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2}.$$

Вещественной частью числа $z = a + bi$ называется число $a = \operatorname{Re} z$. Мнимой частью числа $z = a + bi$ называется число $b = \operatorname{Im} z$. Сопряженным к числу $z = a + ib$ называется число $\overline{z} = a - ib$. Модулем числа z называется вещественное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Лемма 10 *Для любых комплексных чисел z справедливы равенства*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}, \quad z^{-1} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Доказательство леммы элементарно.

Заметим, что множество комплексных чисел содержит все вещественные числа.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Поставим в соответствие комплексному числу $a + ib$ вектор $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ на плоскости. Ясно, что данное соответствие является биекцией: для каждого комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ существует вектор $v = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$; для каждого вектора $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ существует комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$; каждому элементу $z \in \mathbb{C}$ соответствует единственный элемент $v \in \mathbb{R}^2$.

Лемма 11 *Пусть числам $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ соответствуют векторы $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$. Тогда*

$$z_1 = z_2 + z_3 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_2 + v_3.$$

Лемма 12 (Существование и единственность тригонометрической формы) *Для каждого ненулевого комплексного числа $z = a+bi \in \mathbb{C}$ существуют положительное вещественное число $r \in \mathbb{R}$ и угол $\varphi \in [0; 2\pi)$ такие, что*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Кроме этого, (r, φ) является единственной такой парой.

Определение 8 *Число $r = \sqrt{a^2+b^2}$ называется модулем числа $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Обозначается через $|z|$. Угол*

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \textit{если} \quad b \geqslant 0; \\ 2\pi - \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \textit{если} \quad b < 0, \end{cases}$$

называется аргументом числа $z = a+bi \in \mathbb{C}$. Обозначается через $\arg z$.

Приведем примеры нахождения тригонометрической формы комплексного числа.

Пусть $z = 8-6i$. Тогда $|z| = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10$ и $\arg z = 2\pi - \arccos 0,8$, поскольку $Imz < 0$.

Пусть $z = 7+\sqrt{51}i$. Тогда $|z| = 10$ и $\arg z = \arccos 0,07$, поскольку $Imz \geqslant 0$.

Пусть $z = -6-6i$. Тогда $|z| = 6\sqrt{2}$ и $\arg z = 2\pi - \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})$, поскольку $Imz < 0$. Следовательно, $\arg z = \frac{5\pi}{4}$.

Лемма 13 *Произведение произвольных комплексных чисел*

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

равно

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

т.е.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \textit{и} \quad \arg(z_1+z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Из леммы 13 с помощью математической индукции следует утверждение.

Следствие 1 *n-ая степень комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ равно*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

В других обозначениях $|z^n| = |z|^n$ и $\arg z^n = n\arg z$.

Из доказанных утверждений выведем важное следствие, называемое формулой Муавра.

Теорема 8 (Муавра) *Уравнение $z^n = R(\cos\psi + i\sin\psi)$ имеет ровно n корней*

$$z = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi+2\pi k}{n}\right), \ \textit{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Приведем еще одно применение следствия 1.

Лемма 14 *Поскольку $(\cos\psi + i\sin\psi)^n = \cos n\psi + i\sin n\psi$.*

Тогда

$$\cos n\psi = Re\,(\cos\psi + i\sin\psi)^n \ \textit{ и } \ \sin n\psi = Im\,(\cos\psi + i\sin\psi)^n.$$

Из леммы 14 следует, что

$$\begin{aligned}
\cos 2\psi &= \cos^2\psi - \sin^2\psi;\\
\cos 3\psi &= \cos^3\psi - 3\cos\psi\sin^2\psi;\\
\cos 4\psi &= \cos^4\psi - 6\cos^2\psi\sin^2\psi + \sin^4\psi;
\end{aligned}$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{2010}. При каких n верно равенство $i^n = 1$?

2. Вычислите $(2+3i)(1+i)$, $\quad(5+2i):(7+i)$, $\quad(4+3i):(1-8i)$.

3. Найдите произведения $(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4})$, $\quad(\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6})$.

4. Приведите к тригонометрической форме числа $1+i$, $\quad\sqrt{3}+i$, $\quad i$, $\quad 3+4i$, $\quad 7+5i$.

5. Приведите к тригонометрической форме числа по рисунку $1-i$, $\quad i$, $\quad -i$, $\quad -1+i$.

6. Найдите все комплексные корни $z^2=1$, $z^4=1$, $z^8=1$, $z^{12}=1$, $z^3=1$. Нарисуйте корни на комплексной плоскости.

7. Найти наименьшее значение $|z-5|+|z-5i|$, где комплексные числа z удовлетворяют условию $z^2-\bar{z}^2=16i$.

8. Пусть z — комплексное число, у которого $|z|=1$ и $z\neq -1$. Докажите, что найдется действительное число t такое, что

$$z=\frac{1+it}{1-it}.$$

9. Упростите выражение:

$$\left|\frac{xy+yz+zx}{x+y+z}\right|,$$

где $x,\ y,\ z$ — комплексные числа и $|x|=|y|=|z|=r\neq 0$.

10. Точки числовой плоскости, соответствующие комплексным числам $c_1,\ c_2,\ldots,\ c_n$, являются вершинами выпуклого n–угольника. Докажите, что если комплексное число z_0 является корнем уравнения

$$\frac{1}{z-c_1}+\frac{1}{z-c_2}+\ldots+\frac{1}{z-c_n}=0,$$

то точка, соответствующая числу z_0, лежит внутри данного многоугольника.

Многочлены

Определение 9 *Выражения вида*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

называются многочленами (полиномами). Если $a_n \neq 0$, то n — степень многочлена. Обозначается через $\deg P(x)$. Многочлен с единичным старшим членом $a_n = 1$ называется приведенным. Коэффициент a_0 называется свободным членом. Множество всех многочленом с вещественными коэффициентами обозначается через $\mathbb{R}[x]$, комплексными — $\mathbb{C}[x]$, целыми — $Z[x]$.

Замечание. Числа являются многочленами нулевой степени. $\deg(x^2 + ax + c) = 2$.

Лемма 15 *Для любых $P(x)$ и $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ справедливо неравенство*

$$\deg(P(x) + Q(x)) \leqslant \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}.$$

Замечание. Для $P = 1 - x^2$ и $Q(2 + x^2)$ нет равенства в выражении леммы 15.

Лемма 16 *Для любых $P(x)$ и $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ справедливо равенство*

$$\deg(P(x)Q(x)) = \deg P(x) + \deg Q(x).$$

Определение 10 *Если*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, Q(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l,$$

то произведением PQ называется многочлен

$$PQ = \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} x^j = \sum_{j=1}^{n+m} \sum_{k+l=j} a_k b_l x^j.$$

Если для $P, Q, R \in \mathbb{R}[x]$ справедливо $P = RQ$, то определена операция деления P на Q :

$$P : Q = R.$$

Если $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ справедливо равенство $P = RQ + r$ и $\deg r < \deg Q$, то определена операция деления P на Q с остатком

$$P : Q = R(ост.r).$$

Напомним термины: P — делимое, Q — делитель, R — неполное частное, r — остаток.

Теорема 9 (о существовании неполного частного) *Любой $P \in \mathbb{R}[x]$ можно поделить на произвольный ненулевой $Q \in \mathbb{R}[x]$ с остатком. Другими словами, для любых $P, Q \neq 0 \in \mathbb{R}[x]$ существуют R и $r \in \mathbb{R}[x]$ такие, что $P = QR + r$ и $\deg r < \deg Q$.*

◄ Опишем алгоритм деления с остатком. Затем покажем, что этот алгоритм корректен. Пусть $P_1 = P$ и $i = 1$.

1-й шаг. Если $\deg P_i < \deg Q$, то $r = P_i$.

2-й шаг. Если $\deg P_i \geqslant \deg Q$, то пусть

$$P_{i+1} = P_i - \frac{\text{ст.коэфф. } P_i}{\text{ст.коэфф. } Q} \cdot x^{\deg P_i - \deg Q} \cdot Q \qquad (18)$$

Далее продолжаем следующую итерацию для $i \mapsto i+1$.

В результате работы алгоритма мы имеем следующие равенства

$$\begin{array}{rcl} P_1 &=& R_1 Q + P_2; \\ P_2 &=& R_2 Q + P_3; \\ && \ldots \\ P_{k-1} &=& R_{k-1} Q + P_k; \\ P_k &=& r, \end{array}$$

где $\deg P_k < \deg Q$. Поскольку в результате обратных подстановок мы получим

$$P = P_1 = (R_1 + R_2 + \ldots + R_{k-1})Q + r, \quad \deg r < \deg Q,$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 - 3 & \underline{x+2} \\ \underline{x^3 + 2x^2} & x^2 + x - 2 \\ \quad x^2 - 3 & \\ \quad \underline{x^2 + 2x} & \\ \qquad -2x - 3 & \\ \qquad \underline{-2x - 4} & \\ \qquad\qquad 1 & \end{array}$$

то r — остаток от деления P на Q. Затем мы найдем неполное частное $R = (P - r) : Q$.

Поскольку $Q \neq 0$, то старший коэффициент Q не равен 0. Алгоритм не содержит деления на ноль. Алгоритм сделает не более $1 + \deg P$ итераций, т.е. является конечным. ▶

Описанный в доказательстве алгоритм является хорошо известным с начальных классов школы алгоритмом деления "уголком". Приведем пример деления $x^3 + 3x^2 - 3$ на $x + 2$ с остатком. В совершенно непонятной формуле (18) записан совершенно понятный и естественный выбор элементов неполного частного: в данном случае $x^2 + x - 2$. Остаток равен 1. В данном случае произведено 4 итерации.

Наибольший общий делитель многочленов

Пусть $P \bmod Q$ — остаток от деления P на Q.

Заметим, что $P \bmod Q = P \bmod \lambda Q$ для любых ненулевых $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 17 *Если $\deg P \geqslant \deg Q$, то НОД$(P, Q) =$ НОД$(P - \lambda x^k Q, Q)$ для любого ненулевого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и любых $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.*

◀ Пусть N — множество всех общих делителей P и Q, M — множество всех общих делителей $P - \lambda x^k Q$ и Q. Мы покажем, что $N \subset M$ и $M \subset N$. Это будет означать равенство НОД$(P, Q) =$ НОД$(P - \lambda x^k Q, Q)$.

Действительно, если P и Q кратны $D \in \mathbb{R}[x]$, то $P - \lambda x^k Q$ кратен D для $k \geqslant 0$. Следовательно, $N \subseteq M$. Обратно, если $P - \lambda x^k Q$ и $Q(x)$ кратен $E \in \mathbb{R}[x]$, то $(P - \lambda x^k Q) + \lambda x^k Q$ также кратен $E(x)$. Поэтому $M \subseteq N$ ▶

Из леммы 17 следует следующая теорема

Теорема 10 (Алгоритм Евклида) *Если $\deg P \geqslant \deg Q$, то НОД$(P, Q) =$ НОД$(P \bmod Q, Q)$.*

Основная теорема алгебры

Определение 11 *Если для числа $x_0 \in \mathbb{R}$ справедливо $P(x_0) = 0$, то число x_0 называется корнем многочлена.*

Теорема 11 *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P > 0$, имеет хотя бы один комплексный корень.*

Докажем техническую лемму

Лемма 18 *Пусть $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ и $A = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|\}$. Тогда для любого $k > 0$ верно неравенство*

$$|x|^n > k|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0|$$

для всех комплексных $x \in \mathbb{C}$ находящихся вне окружности $|x| > Ak + 1$ на комплексной плоскости

Заметим, что для любых комплексных чисел $a, b \in \mathbb{C}$ справедливы равенство $|ab| = |a| \cdot |b|$ и неравенство $|a| + |b| \geqslant |a + b|$, которое называется неравенством треугольников.

Доказательство леммы 18. По неравенству треугольника

$$\begin{aligned}
&|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0| \leqslant \\
&\qquad \leqslant |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x| + |a_0| \leqslant |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2| + |a_1x| + |a_0| \leqslant \\
&\qquad \leqslant |a_{n-1}x^{n-1}| + \ldots + |a_2x^2| + |a_1x| + |a_0| \leqslant |a_{n-1}| \cdot |x^{n-1}| + \ldots + |a_1| \cdot |x| + |a_0| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant A(|x^{n-1}| + \ldots + |x|^2 + |x| + 1) = A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}.
\end{aligned}$$

Поскольку $|x| > 1$, то верно неравенство

$$A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} \leqslant A\frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Последнее выражение меньше $\dfrac{1}{k}|x|^n$ для всех $|x| > Ak + 1$. Лемма доказана.

Приведем лемму Даламбера.

Лемма 19 (Даламбер) *Для любого многочлена $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg Q(x) > 0$ и точки $z \in \mathbb{C}$ существует $h \in \mathbb{C}$ такое, что $|Q(z)| \geqslant |Q(z + h)|$ если $Q(z) \neq 0$.*

Доказательство основной теоремы алгебры.

????????????????

Теорема 12 (Безу) *Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x] \cup \mathbb{C}[x]$. Верны два утверждения:*

Если $P(c) = 0$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$, то $P(x)$ кратно $(x - c)$.

Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x] \cup \mathbb{C}[x]$. Остаток от деления $P(x)$ на $(x - c)$ равен $P(c)$.

Доказательство теоремы Безу. Первое утверждение теоремы хорошо известно как теорема Безу. Но поскольку второе утверждение является более общим, то мы докажем его.

Остаток от деления на многочлен первой степени имеет нулевую степень, поэтому $P(x) \bmod (x - c)$ является числом. Обозначим его через a. По определению деления с остатком многочлены $P(x)$ и $(x - c)Q(x) + a$ равны. Следовательно, они равны и при $x = c$. Это означает $a = P(c)$. Теорема доказана.

Определение 12 *Если $P(x)$ кратно $(x-c)^k$, но не кратно $(x-c)^{k+1}$, то корень называется корнем $P(x)$ кратности k.*

Следствие 2 *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени $n = \deg P(x)$ имеет ровно n корней с учетом кратности.*

Следствие 3 *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени $n = \deg P(x)$ можно представить в виде произведения линейных многочленов*

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

единственным образом с точностью до перемены местами сомножителей.

Кольцо многочленов — сложение и умножение многочленов. Свойства кольца многочленов: ассоциативность, существование нуля, существование противоположного, коммутативность, ассоциативность умножения, существование единицы. дистрибутивность.

Теорема 13 (Виет) *Если $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}(x)$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.*

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}
a_0 &= (-1)^n x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n;\\
a_1 &= (-1)^{n-1}(x_2 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + x_1 x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + \ldots + x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1});\\
&\ldots\\
a_{n-2} &= x_1 x_2 - x_1 x_3 - \ldots - x_{n-1} x_n;\\
a_{n-1} &= -x_1 - x_2 - \ldots - x_n;
\end{aligned}$$

$\lhd$ Проверить прямым подсчетом $\rhd$

Теорема о рациональных корнях многочлена.

Теорема 14 *Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}(x)$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то a_n кратно q, а a_0 кратно p. ∇ б.д. $\triangle$*

Оценка корней многочлен — теорема.

Теорема 15 (Оценка корней многочлена снизу и сверху) *Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}(x)$. Тогда все вещественные корни лежат на отрезке $\left[-1 - \frac{A}{|a_n|}; 1 + \frac{A}{|a_n|}\right]$, где $A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$.*

$\lhd$ Вывести, используя формулу суммирования геометрической прогрессии, из очевидного равенства $|a_n x_0^n| = |a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0|$, где x_0 — корень $P(x)$. $\rhd$

Алгоритм Штурма определения числа вещественных корней. Оценка корней многочлена с помощью алгоритма Штурма.

Метод Ньютона

Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть неизвестную функцию $f(x)$ известно, что

$$f(x_1) = c_1, \quad f(x_2) = c_2, \quad \ldots, \quad f(x_{n+1}) = c_{n+1}.$$

Многочлен

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i \frac{(x-x_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(x-x_i)}\cdot\ldots\cdot(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot\widehat{(x_i-x_i)}\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{n+1})}$$

называется интерполяционным многочленом Лагранжа, интерполирующим (приближающим) функцию $f(x)$. Легко видеть, что $P(x_j) = c_j$ для всех $j = \overline{1,(n+1)}$.

Формула Виета

Определение 13 *Многочлен $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ называется приведенным, если $a_n = 1$.*

Теорема 16 *Пусть приведенный многочлен $P(x)$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда*

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -x_1 - x_2 - \ldots - x_n;\\
a_{n-2} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots - x_{n-1}x_n;\\
a_{n-3} &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots - x_{n-2}x_{n-1}x_n;\\
&\ldots\\
a_0 &= x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_n.
\end{aligned}$$

Рациональные дроби

Определение 14 *Если $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, то выражения вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется рациональной дробью.*

Простейшими рациональными дробями называются дроби вида

$$\frac{b}{x+a}, \quad \frac{b}{(x+a)^2}, \quad \frac{b}{(x+a)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{cx+d}{x^2+ax+b}, \quad \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^2}, \quad \ldots$$

Многочлен $P(x)$ называется неприводимым, если он не представим в виде $P(x) = Q(x)R(x)$, где $\deg Q$, $\deg R \geqslant 1$.

Лемма 20 *Неприводимые многочлены в $\mathbb{C}[x]$ — линейные многочлены и числа $\{a_1x + a_0 \mid a_1, a_0 \in \mathbb{C}\}$.*

Неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$ — квадратичные трехчлены, линейные многочлены и числа $\{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_1^2 - 4a_0a_2 < 0\} \cup \{a_1x + a_0 \mid a_1, a_0 \in \mathbb{C}\}$.

◀ Первое утверждение следует из основной теоремы алгебры.

Докажем второе утверждение. Поскольку $\overline{a+bi} + \overline{c+di} = \overline{(a+bi)+(c+di)}$ и $(\overline{a+bi})(\overline{c+di}) = \overline{(a+bi)(c+di)}$,

$$P(\overline{z_0}) = a_n\overline{z_0}^n + a_{n-1}\overline{z_0}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z_0} + a_0 = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0.$$

Если z_0 является корнем $P(z)$, то $\overline{z}_0$ также является корнем $P(z)$.

Рассмотрим разложение $P(z)$, $\deg P = k + s$, на произведение линейных многочленов

$$P(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_k)(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_s), \quad r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}, z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{C}.$$

Некоторые сомножители соответствуют вещественным корням, другие — комплексным. Из доказанного выше следует, что все комплексные корни разбиваются на пары сопряженных.

$$P(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_k)(z - z_1)(z - \overline{z}_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_r)(z - \overline{z}_r).$$

Произведения вида $(z - z_i)(z - \overline{z}_i)$ равны $z^2 - (z_i + \overline{z}_i)z + z_i\overline{z}_i$. Поскольку $z_i + \overline{z}_i$ и $z_i\overline{z}_i$ вещественны, то такие произведения $(z - z_i)(z - \overline{z}_i) = z^2 + a_i z + b_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$. ►

Теорема 17 *Любая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и простейших рациональных дробей.*

3 Векторные пространства

Определение 15 *Множество V с операциями сложения векторов и умножения вектора на число называется векторным (линейным) пространством, если выполнены следующие восемь аксиомы для любых $u, v, w \in V$ и произвольных чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*

1) $u + v = v + u$; аксиома коммутативность

2) $u + (v + w) = (u + v) + w$; аксиома ассоциативности

3) существует $\vec{O} \in V$ такой, что $u + \vec{O} = \vec{O} + u = u$ для любого $u \in V$;

4) для любого v существует вектор, обозначаемый через $-v$ такой, что

$$v + (-v) = -v + v = \vec{O};$$

5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$; аксиома дистрибутивности

6) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$; аксиома дистрибутивности

7) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;

8) $1 \cdot v = v$;

Элементы векторного пространства называются векторами.

В курсе алгебры векторы не выделяются стрелкой сверху.

Примеры векторных пространств: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $C[a, b]$.

Лемма 21 *Кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ является векторными пространством.*

Определение 16 *Системой векторов называется называется упорядоченное множество векторов. Линейной комбинацией*

Линейной комбинацией системы векторов v_1, v_2, $\ldots$, v_n называется выражения вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Если в выражении все коэффициенты равны $0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n$, то линейная комбинация называется тривиальной.

Если вектор w равен некоторой линейной комбинации системы векторов v_1, v_2, $\ldots$, v_n, то говорят "w линейно выражается через v_1, v_2, $\ldots$, v_n".

Если некоторая нетривиальная линейная комбинация векторов v_1, v_2, $\ldots$, v_n равна нулевому вектору, то эта система векторов называется линейно зависимой.

Система векторов называется линейно независимой, если из равенства нулю линейной комбинации векторов следует тривиальность этой линейной комбинации.

Последнее определение можно переформулировать следующим образом:

Система векторов называется линейно независимой, если линейная комбинация системы векторов равна нулевому вектору только в тривиальном случае.

Система векторов называется линейно независимой, если все нетривиальные ее линейные комбинации системы векторов не равны нулевому вектору.

Лемма 22 *Система векторов линейно зависима если и только если хотя бы один вектор из этой системы линейно выражается через остальные.*

Определение 17 *Система векторов* $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *называется базисом векторного пространства* V, *если*

1) $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ *— линейно независима;*

2) каждый вектор V *линейно выражается через векторы этой системы векторов.*

Размерностью векторного пространства V *называется количество векторов в его базисе.*

Заметим, что размерность пространства не зависит от выбора базиса.

Координаты вектора

Определение 18 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ базис пространства V. Координатами вектора $w \in V$ называется набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.*

Координаты вектор всегда определяются относительно некоторого базиса. При работе с несколькими базисами мы будем писать $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_e$, что означает $v = e_1\alpha_1 + \ldots + e_n\alpha_n$.

Лемма 23 (Об единственности координат) *Каждый вектор имеет единственный набор координат.*

Лемма 24 (О матрице перехода от базиса к базису в $\mathbb{R}^3$) *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ даны два базиса*

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3), \qquad & p &= (p_1, p_2, p_3),\\ b &= (b_1, b_2, b_3), & q &= (q_1, q_2, q_3),\\ c &= (c_1, c_2, c_3), & r &= (r_1, r_2, r_3). \end{aligned}$$

Тогда матрица перехода от координат базиса a, b, c к координатам базиса p, q, r равна

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

◀ Пусть произвольный вектор v имеет координаты $(v_1, v_2, v_3)_{abc}$ относительно базиса a, b, c и координаты $(w_1, w_2, w_3)_{pqr}$ относительно базиса p, q, r.

По определению координат $v = v_1 a + v_2 b + v_3 c$ и $v = w_1 p + w_2 q + w_3 r$.

С одной стороны выпишем координаты v в стандартном базисе

$$v = v_1 \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1\\ v_1 a_2\\ v_1 a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 b_1\\ v_2 b_2\\ v_2 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_3 c_1\\ v_3 c_2\\ v_3 c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 + v_2 b_1 + v_3 c_1\\ v_1 a_2 + v_2 b_2 + v_3 c_2\\ v_1 a_3 + v_2 b_3 + v_3 c_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, v имеет следующие координаты в стандартном базисе

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица, составленная из координат линейно независимых векторов **имеет максимальный ранг**. Следовательно,

▶

3.1 Линейная оболочка векторов

Множество всех линейных комбинаций вида $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ "пробегают" $\mathbb{R}$, называется линейной оболочкой векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Обозначается $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Иногда $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ называется векторным пространством, натянутым на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Лемма 25 *Для любой системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейная оболочка $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ является векторным пространством.*

3.2 Изоморфизмы векторных пространств

Определение 19 *Отображение $f : V \to W$ называется биекцией, если оно*

1) взаимно однозначно ($f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$);

2) всюду определено на V (для любого $v \in V$ существует $f(v)$);

3) отображает "на" W (для любого $w \in W$ существует $v \in V$ такое, что $w = f(v)$);

Биекция $f : V \to W$ между векторными пространствами называется изоморфизмом векторных пространств, если она сохраняет оперции, т.е. для любых $v, u \in V$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$

4) $f(v +_V u) = f(v) +_W f(w)$;

5) $f(\alpha \cdot_V v) = \alpha \cdot_W f(v)$.

Здесь "$+_V$"операция сложения векторов, "$\cdot_V$"умножения вектора на число в пространстве V; "$+_W$"операция сложения векторов, "$\cdot_W$"умножения вектора на число в W.

Если существует изоморфизм между V и W, то векторные пространства V и W называются изоморфными. Обозначается через $V \cong W$.

Поскольку композиция биекций является биекцией, то $U \cong V$ и $V \cong W$, то $U \cong W$.

Теорема 18 (Об изоморфности n-мерных пространств) *Каждое векторное пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

3.3 Векторное подпространство

Определение 20 *Пусть W подмножество векторного пространства V является векторным пространством. Такие подмножества W называются векторными подпространствами V.*

Теорема 19 (Критерий подпространства) *Пусть V — произвольное векторное пространство и $W \subseteq V$ некоторое его подмножество.*

Тогда W является векторным подпространством W если и только если выполнены все следующие три условия

1) для любых $v, w \in W$ сумма $v + w \in W$;

2) для любого $w \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ произведение $\lambda w \in W$;

3) $\vec{O} \in W$.

Лемма 26 *Пусть V — векторное пространство. Подмножество $W \subset V$ является векторным подпространством V тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) для любых векторов $v, u \in W$ верно $v + w \in V$;

2) для любого вектора $v \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $\lambda v \in V$.

$\triangleleft$ Была доказана только половина утверждения: если два условия выполнены, то W — векторное подпространство V. Для этого достаточно проверить все аксиомы векторного пространства $\triangleright$

Примеры:

$W = \langle 1, x \rangle$ подпространство $\mathbb{R}_3[x]$.

Теорема 20 *Пусть A — $m \times n$-матрица, $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Тогда множество всех решений однородной системы уравнений $Av = 0$ является векторным подпространством $\mathbb{R}^n$ размерности $n - \mathrm{rang}\, A$.

Определение 21 *Пусть v_0 — вектор, L — линейное подпространство V.*

Множество

$$\{v_0 + w \mid w \in L\}$$

называется линейным многообразием с вектором сдвига v_0 и направляющим пространством L.

Его размерностью называется размерность $\dim L$.

Определение 22 *Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис пространства ее решений.*

Теорема 21 *Пусть v_0 — частное решение системы уравнений $Av = b$ и L — пространство решений однородной системы линейных уравнений $Av = \vec{O}$.*

Тогда множество всех решений неоднородной системы уравнений $Av = b$ является линейным многообразием (x_0, L).

3.4 Суммирование и пересечение векторных подпространств

Определение 23 *Пусть $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_r\rangle$ и $W = \langle w_1, w_2, \dots, w_s\rangle$ векторные подпространства векторного пространства V.*

Пересечением подпространств U и W называется подпространство

$$U \cap W = \{u \mid u \in U, w \in W\}.$$

Суммой подпространств U и W называется подпространство

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Сумма подрпространств называется прямой, если их пересечение имеет размерность 0. Обозначается через $U \oplus W$.

Ортогональным дополнением к подространству U пространства $\mathbb{R}^n$ называется

$$U^\perp = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \mid u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n, \textit{ для всех } (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U\}.$$

Теорема 22 *Пусть $U = \langle v_1, v_2, \dots v_k\rangle$. Тогда $U^\perp$ является пространством решений однородной системы уравнений*

$$\left(\begin{array}{c|c} \longleftarrow v_1 \longrightarrow & 0 \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow & 0 \\ \dots & \dots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow & 0 \end{array}\right)$$

Теорема 23 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*

Тогда $U \cap W = (U^\perp + W^\perp)^\perp$.

Теорема 24 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*

Тогда $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$.

Лемма 27 *Пусть U векторное подпространство векторного пространства V.*

Тогда любой базис U можно дополнить до базиса V.

3.5 Определение линейной независимости векторов

Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ векторы векторного пространства V. Справедливы следующие леммы, позволяющие выяснить линейную зависимость векторов за конечное число шагов.

Теорема 25 *Линейная независимость системы векторов не зависит от*

1) перестановки местами векторов системы векторов;

2) от умножения вектора системы векторов на ненулевое число;

3) от прибавления вектору системы векторов линейной комбинации других векторов системы векторов.

Это означает, что элементарными преобразованиями Гаусса векторы всегда можно привести к ступенчатому виду.

Евклидовы пространства

Определение 24 *Функция* $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ *называется скалярным произведением, если она обладет тремя свойствами для всех* u, w, v

1) $(u, v) = (v, u)$; *коммутативность*

2) $(u, u) > 0$ *кроме случая* $(\vec{O}, \vec{O}) = 0$; *положительная определенность*

3) $(u, \lambda w + \mu v) = \lambda(u, w) + \mu(u, v)$. *линейность*

Векторное пространство со скалярным произведением называется евклидовым. Длиной (нормой) вектора u называется число $\sqrt{(u, u)}$. *Углом между векторами u и w называется угол* $\alpha \in [0; \pi]$ *такой, что*

$$\cos\alpha = \frac{(u, w)}{|u||w|}.$$

Проекция вектора на вектор

Алгоритм Грамма-Шмидта

Пусть v_1, $v_2, \ldots,$

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1; \\
e_2 &= v_2 - \frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1; \\
e_3 &= v_3 - \frac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2; \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Применяя процесс ортогонализации к столбцам матрицы можно доказать, что каждую невырожденную матрицу O можно разложить в произведение $A = OU$, где O — ортогональная матрица, а U — треугольная матрица с положительными элементами на диагонали.

Проекция вектора на линейную облочку векторов

Кратчайшее расстояние от точки до линейной облочки

Определение 25 *Расстоянием между множествами* A *и* $B \subset E$ *евклидова пространства называется*

$$\rho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} |AB|.$$

Теорема 26 *Пусть* E *— евклидово пространство.*

Расстояние от вектора v *до векторного подпространства* $W \subset E$ *равно*

$$\rho(v, W) = |v - \mathit{Пр}_W v|.$$

Единственным ближайшим к вектору v *является вектор* $\mathit{Пр}_W v$.

◀

▶

Пример задачи выяснения линейной зависимости системы векторов.

Лемма о существовании координат относительно базиса.

3.5.1 Ранги матрицы.

Ранг матрицы A — число ненулевых строк после приведения A к ступенчатому виду.

Теорема. Все ранги матрицы совпадают.

3.6 Критерий совместности с.л.у.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна если и только если ранг матрицы с.л.у. совпадает с рангом расширенной матрицы с.л.у. $\overline{A}$:

Следствие о размерности ортогонального дополнения линейной оболочки линейно независимых векторов. Следствие о сумме размерности векторного подпространства W, его ортогонального дополнения $W^\perp$ и векторного пространства V.

Следствие 4 *Для любого векторного подпространства W векторного пространства V верно равенство*

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$

$\lhd$ Следует из теорем **??** и **??** $\rhd$

Следствие 5 *Если $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — линейно независимы, то*

$$\dim < v_1, v_2, \ldots, v_k >^\perp = n - k$$

$\lhd$ Следует из предыдущего следствия $\rhd$

Теорема о размерности линейной оболочки векторов и ранга матриц, составленной из координат векторов. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при умножении вектора на ненулевое число. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при замене v_i на $v_i + \lambda v_j$. Задача нахождения размерности линейной оболочки векторов.

Теорема 27 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы.*

Тогда

$$\dim < v_1, v_2, \ldots, v_k > = rang \begin{pmatrix} \longleftarrow & v_1 & \longrightarrow \\ \longleftarrow & v_2 & \longrightarrow \\ & \cdots & \\ \longleftarrow & v_k & \longrightarrow \end{pmatrix}$$

$\lhd$ Следует из теоремы **??** и следствий 4, 5 $\rhd$

Линейное преобразование векторных пространств

Определение 26 *Отображение $f : V \to V$ такое, что для любых векторов $w, v \in V$ и чисел λ, μ верно равенство $f(\lambda w + \mu v)$*

Теорема 28 (об основном свойстве линейного преобразования) *Пусть $e_1, e_2, \dots, e_k$ — базис векторного пространства V. Тогда для любого линейного преобразования $f : V \to V$ верно, что*

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n).$$

$\lhd$ Следует из определения линейных преобразований $\rhd$

Следствие о том, что каждое линейное преобразование можно представить с помощью матрицы.

Следствие 6 *Сопоставим векторам $v \in \mathbb{R}^n$ с координатами $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ матрицы-столбцы $\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ размера $n \times 1$.*

Тогда для любого линейного преобразования $f : V \to V$ существует квадратная матрица A размера $n \times n$ такая, что $f(v) = Av$.

$\lhd$ Следует из теоремы 28 $\rhd$

Свойства линейных преобразований: образ нулевого вектора.

Лемма 28 *Пусть $f(v)$ — произвольное линейное преобразование векторного пространства V. Образ нулевого вектора $f(0)$ является нулевым вектором.*

$\lhd$ Следует из определения линейного преобразования $\rhd$

Свойства линейных преобразований: образ противоположного вектора.

Лемма о том, что каждая матрица задает некоторое линейное преобразование.

Лемма 29 *Пусть A — квадратная матрица $n \times n$. Тогда отображение Av является линейным преобразованием.*

$\lhd$ Проверить определение линейного преобразования $\rhd$

Собственные числа и собственные векторы линейных преобразований.

Характеристический многочлен матрицы A.

Лемма о корнях характеристического многочлена.

Лемма 30 *Комплексные корни характеристического многочлена матрицы A являются собственными числами матрицы A.*

$\lhd$ Выбрать произвольный корень λ_0. Показать, что уравнение $(A - \lambda E)v = 0$ имеет хотя бы одно ненулевое решение v. Затем показать, что $Av = \lambda v$ $\rhd$

Жорданова форма матрицы. Теорема о жордановой форме $T^{-1}AT = J$ матрицы A, если собственные числа попарно различны.

Теорема 29 *Если A — квадратная матрица $n \times n$ такая, что*

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \ldots, Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ составляют базис $\mathbb{R}^n$, то верно равенство

$$AT = TJ_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \ldots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Показать справедливость теоремы прямыми вычислениями $\rhd$

Лемма о произведении собственных числах. Лемма о собственных векторах симметрической матрицы $A = A^T$.

Лемма 31 *Пусть λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n — собственные числа матрицы A размера $n \times n$.*

Тогда

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

$\lhd$ Следует из теорем 29, **??** и подсчета определителя диагональной матрицы. $\rhd$

Лемма 32 *Если $A = A^T$, т.е. матрица A является симметрической, то собственные числа матрицы A являются вещественными.* ∇ *б. д.* $\triangle$

Преобразования координат. Формула перевода старых координат в новые координаты. Матрица перехода.

Лемма 33 *Пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — координаты вектора v относительно нового базиса $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и*

$(w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n})$ — координаты вектора w_1 относительно базиса e

$(w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n})$ — координаты вектора w_2 относительно базиса e

$\ldots$

$(w_{n1}, w_{n2}, \ldots, w_{nn})$ — координаты вектора w_n относительно базиса e.

Тогда координаты $(v_1', v_2', \ldots, v_n')$ вектора v относительно старого базиса $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ удовлетворяют условию:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \ldots & w_{n2} \\ \\ w_{1n} & w_{2n} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \ldots \\ v_n' \end{pmatrix}$$

$\lhd$ Переписать в выражении $v = v_1'w_1 + v_2'w_2 + \ldots + v_n'w_n$ векторы w_1, $w_2, \ldots, w_n$ через векторы e_1, e_2, $\ldots$, e_n $\rhd$

Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису. Переход к новому базису из собственных векторов и жорданова форма матрицы.

Лемма 34 *Пусть A — матрица линейного преобразования f относительно старого базиса W, B — матрица линейного преобразования f относительно нового базиса E и T — матрица перехода от старых координат к новым. Тогда верно равенство $B = T^{-1}AT$.*

Теорема о жордановой форме матрицы при совпадении собственных чисел.

Теорема 30 *Пусть f — линейное преобразование R^n такое, что*

$$Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}, \quad Av_{k+2} = \lambda_{k+2} v_{k+2}, \quad \ldots, \quad Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ линейно независимы, остальные собственные числа совпадают $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$.

Тогда существуют собственные и присоединенные к ним векторы v_1, v_k, $\ldots$, v_k такие, что

$$\begin{array}{llllllll}
v_{s_1} & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f & v_2 & \mapsto^f & v_1 & \mapsto^f & 0; \\
v_{s_2} & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f & v_{s_1+2} & \mapsto^f & v_{s_1+1} & \mapsto^f & 0; \\
 & & \ldots & & & & & \\
v_k & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f & v_{s_t+2} & \mapsto^f & v_{s_t+1} & \mapsto^f & 0;
\end{array}$$

и верно равенство

$$AT = TJ, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \ldots \\ \longleftarrow v_n \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J = \begin{pmatrix} J_1 & & \ldots & & \\ & J_2 & \ldots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \ldots & J_{t+1} & \\ & & \ldots & & J_{\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_n} \end{pmatrix},$$

где

$$J_1, J_2, \ldots, J_{t+1} \text{ имеют вид } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

и размеры $s_1 \times s_1, (s_2 - s_1) \times (s_2 - s_1), \ldots, (s_{t+1} - s_t) \times (s_{t+1} - s_t)$ соответственно. ∇ *б.д.* $\triangle$

Функции от матриц.

Теорема 31 *Найдите эту теорему в теореме.* ∇ *б.д.* $\triangle$

Квадратичные формы. Мономы. Представление квадратичной формы с помощью матрицы.

Лемма о формуле изменения матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Лемма 35 *Пусть A — матрица квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ относительно старого базиса.*

Пусть C — матрица квадратичной формы $K(x') = (x')^T Cx'$ относительно нового базиса. Пусть также $x = Bx'$. Тогда

$$C = B^T AB.$$

$\triangleleft$ Доказывается в одну строчку $\triangleright$

Теорема о приведении матрицы квадратичной формы к диагональному виду (другими словами о приведении квадратичной формы к каноническому).

Теорема 32 *Пусть $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для любой квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что в новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид.*

Другими словами для любой квадратной матрицы A существует квадратная матрица B такая, что матрица $B^T AB$ является диагональной.

$\lhd$ Привести алгоритм выделения полного квадрата такое, что избавляется от переменных в выражении $\rhd$

Нормальный вид квадратичной формы. Сокращенная запись нормальной формы квадратичной формы.

Теорема 33 *Пусть $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для любой квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что в новом базисе квадратичная форма имеет нормальный вид.*

Другими словами для любой квадратной матрицы A существует квадратная матрица B такая, что матрица $B^T AB$ является диагональной с элементами -1, 1, 0 по диагонали.

$\lhd$ Вывести из предыдущей теоремы. $\rhd$

Теорема «Закон инерции» об единственности нормального вида квадратичной формы.

Теорема 34 (Закон инерции) *Нормальная форма квадратичной формы единственна с точностью до переобозначения.*

$\lhd$ Доказать от обратного $\rhd$

Положительно определенная квадратичная форма. Следствие о нормальном виде положительно. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Следствие 7 *Пусть квадратичная форма K в имеет следующий нормальный виде $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2 - x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2$. Форма K положительно определена тогда и только тогда, когда $l = 0$ и $k = n$.*

$\lhd$ В обе стороны очевидно $\rhd$

Теорема 35 (Критерий Сильвестра) *Пусть A — матрица квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$. Тогда $K(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A положительны.* ∇ *б.д.* $\triangle$

Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Лексиографический порядок на мономах. Основания теорема о симметрических многочленах.

Теорема 36 (Основаная о симметрических многочленах) *Каждый симметрический многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических.*

$\lhd$ Построить алгоритм построения таких многочленов. Из лексиографического отношения порядка следует конечность этого алгоритма. $\rhd$

Самостоятельная работа студента

АЛГЕБРА

учебной группы

информатика

Описание самостоятельной работы студента

по курсу «Алгебра»

Самостоятельная работа студента состоит из трех частей: проработки лекций, решений задач для закрепления теоретического материала, решения домашних заданий и решения индивидуальных заданий.

Индивидуальные задания состоят из нескольких десятков типовых и нестандартных задач и содержатся в данных материалах. К концу каждого месяца нужно сдать все задачи индивидуальных заданий по пройденным темам.

Индивидуальные задания сгенирированы с помощью программы, разработанной автором, каждый студент получает единственный вариант заданий. Совпадающих вариантов нет среди сокурсников и, даже, старшекурсников.

Темы индивидуальных заданий

Индивидуальные задания	
№	**Перечень рекомендуемых тем**
1	Решение систем линейного уравнения (23 задачи, 20 часов) – Метод Гаусса решения систем лин. уравнения с единственным решением (13 задач, 6 часа) – Метод Гаусса решения систем лин. уравнения с бесконечным числом решений (8 задач, 6 часа) – Метод Гаусса при доказательстве несовместности систем лин. уравнения (2 задачи, 2 часа) – Метод Крамера решения систем линейного уравнения, различные случаи (3 задачи, 4 часа) – Метод решения систем линейного уравнения с помощью матриц (2 задачи, 2 часа)
2	Матрицы и системы линейных уравнений (15 задач, 20 часов) – Произведение матриц (6 задач, 2 часа) – Нахождение определителей матриц (12 задач, 14 часов) – Нахождение обратных матриц (6 задач, 4 часа)
3	Комплексные числа – Арифметические действия с комплексными числами (6 задач, 1 час) – Тригонометрическая форма комплексных чисел (6 задачи, 4 часа) – Комплексные корни многочленов (2 задачи, 1 час) – Геометрическая интерпретация комплексных чисел и операций над ними (1 задача, 0,5 часа)

4	Многочлены – Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида (3 задачи, 1 час) – Схема Горнера, разложение многочлена по степеням (2 задачи, 1 час) – НОД многочленов (2 задачи, 2 часа) – Разложение многочленов на не приводимые множители. Отделение кратных множителей. Корни многочлена (2 задачи, 2 часа) – Связь корней многочлена с его коэффициентами. Теорема Виета (2 задачи, 2 часа) – Корни многочлена с действительными коэффициентами. Оценки корней. (2 задачи, 1 час) – Отыскание целых и рациональных корней многочлена (3 задачи, 2 часа) – Симметрические многочлены (4 задачи, 2 часа)
5	Векторные пространства – Базис. Размерность (5 задач, 3 часа) – Координаты вектора. Преобразование координат (1 задача, 2 часа) – n-мерные векторы. Линейная зависимость (3 задачи, 1 час) – суммы подпространств и линейные многообразия (3 задачи, 6 часов)
6	Евклидовы пространства – Скалярное произведение (10 задач, 3 часа) – Длина и угол (10 задач, 2 часа) – Проекция вектора (3 задачи, 3 час) – Ортогонализация Грамма-Шмидта (2 задачи, 6 часов)
7	Линейные преобразования и матрицы – Ядро линейного преобразования (2 задачи, 4 часа) – Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования (3 задачи, 4 часа) – Характеристический многочлен (3 задачи, 4 часа) – Жорданова форма матрицы (3 задачи, 4 часа)
8	Приведение квадратичной формы к каноническому виду – приведение к каноническому и нормальному виду (3 задачи, 4 часа)
9	Группы Изоморфизм групп

Индивидуальные задания проверяются. Студенты группы «Информатика» в середине каждого семестра проходят аттестацию по результатам сдачи индивидуальных заданий. Задачи всех тем 1-2, кроме задач на нахождение определителей, должны содержать проверку.

ИНФ-10, Алексеев Евгений Михайлович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

$$\mathbf{1.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \mathbf{2.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{3.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{array}\right) \quad \mathbf{4.}\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{5.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \quad \mathbf{6.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{7.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \mathbf{8.}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

$$\mathbf{10.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & -2 \end{array}\right) \quad \mathbf{11.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 10 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

$$\mathbf{13.}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{14.}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{15.}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{16.}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\mathbf{17.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right) \quad \mathbf{18.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\mathbf{19.}\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\mathbf{21.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right) \quad \mathbf{22.}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{6\times2}$,$B_{3\times4}$,$C_{3\times2}$,$D_{3\times6}$,$E_{3\times3}$,$F_{3\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

$$\mathbf{25.}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{26.}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите обратные матрицы

$$\mathbf{27.}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{28.}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Напишите с.л.у.

$$\mathbf{29.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 5 \end{array}\right) \quad \mathbf{30.}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\mathbf{31.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right) \quad \mathbf{32.}\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{33.}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 6 & -1 \\ 7 & 2 & 7 & 6 & 1 \end{array}\right) \quad \mathbf{34.}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{35.}\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & -1 \\ 7 & 7 & 6 & 3 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 4 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 12 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 6 & -1 \\ 4 & 4 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & -4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{5\times 5}$,$B_{4\times 5}$,$C_{5\times 5}$,$D_{5\times 4}$,$E_{4\times 5}$,$F_{2\times 6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 5 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Николаев Дьулус Викторович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

$$\mathbf{1.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \mathbf{2.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{3.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{array}\right) \quad \mathbf{4.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{5.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \mathbf{6.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{7.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right) \quad \mathbf{8.}\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

$$\mathbf{10.}\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & -2 \end{array}\right) \quad \mathbf{11.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

$$\mathbf{13.}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{14.}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{15.}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{16.}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\mathbf{17.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -2 \\ 6 & 6 & 1 \end{array}\right) \quad \mathbf{18.}\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\mathbf{19.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\mathbf{21.}\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right) \quad \mathbf{22.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times3}$,$B_{5\times3}$,$C_{6\times3}$,$D_{3\times5}$,$E_{2\times6}$,$F_{5\times4}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

$$\mathbf{25.}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{26.}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдите обратные матрицы

$$\mathbf{27.}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{28.}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Напишите с.л.у.

$$\mathbf{29.}\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 2 & 10 \end{array}\right) \quad \mathbf{30.}\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\mathbf{31.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right) \quad \mathbf{32.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{33.}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \mathbf{34.}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\mathbf{35.}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

$$\textbf{1.}\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right) \quad \textbf{2.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -2 \\ 6 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\textbf{3.}\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{4.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{5.}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{6.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\textbf{7.}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{8.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & -1 \end{array}\right)$$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

$$\textbf{10.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \end{array}\right) \quad \textbf{11.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 12 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

$$\textbf{13.}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \textbf{14.}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{15.}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \textbf{16.}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\textbf{17.}\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{array}\right) \quad \textbf{18.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

$$\textbf{19.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\textbf{21.}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & -1 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right) \quad \textbf{22.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{6\times4}$,$B_{6\times3}$,$C_{3\times4}$,$D_{3\times4}$,$E_{6\times5}$,$F_{4\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

$$\textbf{25.}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{26.}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдите обратные матрицы

$$\textbf{27.}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{28.}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Напишите с.л.у.

$$\textbf{29.}\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 14 \\ 4 & 6 & 18 \end{array}\right) \quad \textbf{30.}\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 14 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

$$\textbf{31.}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{32.}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{33.}\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{34.}\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\textbf{35.}\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Сидоров Айан Еримеевич

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 7 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 6 & 3 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & -2 \\ -2 & -4 & -3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{5\times3}$,$B_{5\times4}$,$C_{4\times4}$,$D_{3\times4}$,$E_{3\times3}$,$F_{6\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & -5 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 5 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 7 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 7 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 6 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Иванова Екатерина Анатольевна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 6 & -1 \\ 5 & 2 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 4 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times6}$,$B_{3\times3}$,$C_{5\times4}$,$D_{3\times4}$,$E_{5\times2}$,$F_{5\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 6 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Филиппов Анатолий Сергеевич

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 10 \\ 4 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{2\times5}$,$B_{5\times3}$,$C_{4\times6}$,$D_{4\times4}$,$E_{3\times4}$,$F_{5\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Алексеев Арсен Семенович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & -1 \\ 7 & 3 & 6 & -2 \\ 5 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 12 \\ 5 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 9 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{5\times5}$,$B_{5\times3}$,$C_{2\times2}$,$D_{5\times5}$,$E_{6\times6}$,$F_{5\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 6 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 1 \\ 7 & 2 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Владимирова Вероника Николаевна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 8 \\ 5 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 5 & 7 & 14 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 7 & 6 & 6 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times3}$,$B_{6\times3}$,$C_{2\times4}$,$D_{3\times3}$,$E_{4\times6}$,$F_{4\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Алексеев Алексей Александрович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 5 & -2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 15 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times4}$,$B_{3\times4}$,$C_{6\times3}$,$D_{2\times4}$,$E_{2\times5}$,$F_{2\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 18 \\ 4 & 3 & 18 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 7 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 3 & 6 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 7 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 6 & -1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Сокольникова Валентина Владимировна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 6 & 12 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 5 & -2 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times2}$,$B_{4\times5}$,$C_{4\times5}$,$D_{4\times4}$,$E_{3\times3}$,$F_{2\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 4 & -1 \\ 2 & 7 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 5 & 5 & -2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & -2 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 7 & 6 & 5 & -2 \\ 4 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 10 \\ 6 & 2 & 4 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 6 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times5}$,$B_{5\times3}$,$C_{4\times4}$,$D_{2\times4}$,$E_{4\times3}$,$F_{4\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -10 \\ 4 & 3 & -8 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -8 \\ 1 & 5 & -10 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Алексеева Акулина Анатольевна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 5 & -2 \\ 6 & 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & -2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 10 \\ 6 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & -1 \\ 6 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & -10 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times6}$,$B_{6\times3}$,$C_{2\times3}$,$D_{3\times3}$,$E_{5\times5}$,$F_{2\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 12 \\ 4 & 3 & 9 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 6 & 5 & 16 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 6 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 5 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Тайшин Егор Дмитриевич

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 10 \\ 6 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 10 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times4}$,$B_{4\times4}$,$C_{6\times4}$,$D_{2\times5}$,$E_{4\times2}$,$F_{2\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 2 & -4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 2 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 14 \\ 7 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & 14 \\ 6 & 7 & 14 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times4}$,$B_{6\times4}$,$C_{2\times6}$,$D_{6\times5}$,$E_{4\times5}$,$F_{4\times4}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 10 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 6 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 7 & -1 \\ 4 & 6 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 5 & -2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Сергеев Александр Германович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 2 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 6 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 5 & -2 \\ 7 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times5}$,$B_{4\times5}$,$C_{3\times6}$,$D_{5\times6}$,$E_{3\times6}$,$F_{5\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 15 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 7 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 5 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & -2 \\ 5 & 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 12 \\ 5 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 21 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times3}$,$B_{5\times2}$,$C_{2\times4}$,$D_{2\times6}$,$E_{4\times4}$,$F_{2\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 8 \\ 5 & 3 & 8 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 6 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 6 & 2 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Ефремова Сахая Алексеевна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 6 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \\ 7 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 6 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 5 & 3 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 8 \\ 6 & 7 & 14 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 8 \\ 6 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & -2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 5 & -1 \\ 3 & 3 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & -2 \\ 6 & 6 & -3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times4}$,$B_{5\times5}$,$C_{3\times6}$,$D_{6\times5}$,$E_{3\times5}$,$F_{5\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -4 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 5 & 6 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 6 & -2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Филиппова Татьяна Олеговна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 5 & -1 \\ 6 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 8 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times6}$,$B_{5\times4}$,$C_{5\times5}$,$D_{2\times4}$,$E_{2\times3}$,$F_{5\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -6 \\ 5 & 2 & -10 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 7 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & -1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & 2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Андреев Филипп Александрович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & -1 \\ 6 & 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 12 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 7 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 7 & 3 \\ 6 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 2 \\ 4,5 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times6}$,$B_{5\times2}$,$C_{6\times2}$,$D_{5\times4}$,$E_{4\times4}$,$F_{3\times2}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 15 \\ 4 & 3 & 12 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 10 \\ 6 & 1 & 2 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 7 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 4 & 3 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 4 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 4 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 5 & 5 & -2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Григорьева Екатерина Петровна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & -2 \\ 7 & 4 & 6 & -1 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 12 \\ 4 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 14 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -14 \\ 3 & 6 & -21 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times5}$,$B_{4\times4}$,$C_{3\times3}$,$D_{2\times2}$,$E_{2\times5}$,$F_{5\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & 10 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 9 \\ 5 & 5 & 15 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 7 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Прокопьев Айаал Алексеевич

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 7 & 5 & 0 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 3 & -2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 12 \\ 6 & 4 & 8 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 9 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{4\times6}$,$B_{5\times2}$,$C_{3\times4}$,$D_{3\times3}$,$E_{2\times4}$,$F_{2\times6}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & -9 \\ 3 & 2 & -5 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & -2 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 7 & 2 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 6 & 4 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & 6 & 6 & 1 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Петрова Саргылана Артуровна

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & -1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 4 & 2 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 14 & 6 \\ 6 & 21 & 9 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times4}$,$B_{4\times3}$,$C_{4\times6}$,$D_{4\times5}$,$E_{3\times3}$,$F_{4\times3}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 4 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 7 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 5 & 5 & -1 \\ 6 & 6 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 2 & 4 & 6 & -1 \\ 4 & 6 & 7 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 6 & 5 & 5 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 12 \\ 5 & 2 & 4 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times3}$,$B_{5\times4}$,$C_{6\times3}$,$D_{5\times4}$,$E_{4\times3}$,$F_{3\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 12 \\ 4 & 6 & 14 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & -5 \\ 4 & 4 & -4 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 7 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 6 & 5 & 0 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 6 & 7 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

ИНФ-10, Могусов Александр Михайлович

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 7 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 7 & 14 \\ 6 & 5 & 10 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 12 \\ 6 & 7 & 14 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times3}$,$B_{2\times3}$,$C_{4\times6}$,$D_{6\times6}$,$E_{5\times4}$,$F_{3\times4}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -4 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 1 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 2 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 6 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 3 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три векторстолбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

РЕШИТЕ МЕТОДОМ ГАУССА С.Л.У.

1. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ **2.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{array}\right)$

3. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{array}\right)$ **4.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right)$ **6.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 5 & -1 \\ 5 & 6 & 4 & -1 \end{array}\right)$

7. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & -2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ **8.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right)$

9. Напишите программу на любом языке, которая бы решала методом Гаусса систему из двух линейных уравнений: 1. Программа запрашивает коэффициенты $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$. 2. Решает систему уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right).$$

При появлении делении на нуль сообщает об ошибке и останавливается. 3. Выводит решение с.л.у.

10. $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 6 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$

12. Найдите определители матриц систем линейных уравнений из задач 1, 10 и 11.

НАЙДИТЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

17. $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \end{array}\right)$ **18.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 14 \\ 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

РЕШИТЕ МЕТОДОМ КРАМЕРА С.Л.У.

19. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right)$

20. Единственно ли решение данной с.л.у.?

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

21. $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{array}\right)$ **22.** $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \end{array}\right)$

Произведение матриц

23. Найдите произведение BA матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

24. Какие матрицы можно умножить друг на друга? $A_{3\times5}$,$B_{5\times3}$,$C_{4\times5}$,$D_{4\times3}$,$E_{2\times6}$,$F_{3\times5}$. Напомним, что $A_{m\times n}$ означате, что матрица A имеет m строк и n столбцов.

Найдите обратные матрицы

25. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **26.** $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Найдите обратные матрицы

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Напишите с.л.у.

29. $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{array}\right)$ **30.** $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью операции нахождения обратной матрицы.

НАЙДИТЕ ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С.Л.У.

31. $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & -1 \end{array}\right)$ **32.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 6 & 3 \end{array}\right)$

33. $\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 6 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & -1 \end{array}\right)$ **34.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 7 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right)$

35. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$

36. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 2×2.

37. Напишите программу, вычисляющую определитель матрицы 3×3.

38. Оформите предыдущую программу в виде функции от трех векторов-столбцов (т.е. нужно матрицу 3×3 нужно воспринимать как три вектор-столбца). Напишите программу решающую любую систему трех линейных уравнений от трех переменных методом Крамера. Необходимо, чтобы 1) при существовании единственного решения, программа должна об этом сообщить и вывести это решение; 2) при существовании бесконечно количества решений, программа должна сообщить о существовании бесконечного числа решений; 3) при отсутствии решений, программа должна сообщить об отсутствии решений.

Литература

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.

3. `http://yktmath.narod.ru`

Вариант 1.

Комплексные числа

1. Вычислите $(1+2i)(1+2i)$, $(6+1i):(4+4i)$, $(5+5i):(1+5i)$, $(4+3i):(5+1i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $1+5i$, $6(3+6i)$, $(5+1i)3$.

3. Вычислите i^{925}.

4. Вычислите $(-1+\sqrt{3}i)^{1573}$.

5. Вычислите $(-1-i)^{1502}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3=-1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^{-3}=-1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-12x-4x^2+3x^3+x^4$, $Q(x)=-12-10x+10x^2+10x^3+2x^4$, $R(x)=1-x-x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-4+3x^2+x^3$, $Q(x)=3+4x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=-2x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 5 является корнем многочлена $P(x)=150-185x+81x^2-15x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-9x^2+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-2x-3x^2+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+x^4-2x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-2-3x+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-5+4x-4x^2+5x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-3.2-1.2x-6.x^2+5x^3$.

11. Докажите неравенство $26-38x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 1$.

Вариант 2.

Комплексные числа

1. Вычислите $(4+6i)(6+1i)$, $(3+4i):(3+3i)$, $(2+3i):(6+5i)$, $(1+1i):(4+1i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $4+2i$, $3(6+5i)$, $(2+5i)2$.

3. Вычислите i^{584}.

4. Вычислите $(\sqrt{3}-i)^{993}$.

5. Вычислите $(1+i)^{266}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-x+3x^2-3x^3+x^4$, $Q(x)=-6x-3x^2+6x^3+3x^4$, $R(x)=6+x-4x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=1-x-x^2+x^3$, $Q(x)=4-4x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-1$, где $P(x)=6x-7x^2+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 2 является корнем многочлена $P(x)=120-154x+71x^2-14x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-6x+x^2+4x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-4x+3x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-2x^3+5x^4-4x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-10-8x-3x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10-5x+3x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-1.1-1.2x-0.2x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $18-12x+7x^2-4x^3+x^4\geqslant 1$.

Вариант 3.

Комплексные числа

1. Вычислите $(6+6i)(5+1i)$, $(3+2i):(2+3i)$, $(6+4i):(4+5i)$, $(3+6i):(6+1i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $6+5i$, $3(1+3i)$, $(6+3i)5$.

3. Вычислите i^{552}.

4. Вычислите $(\sqrt{3}-i)^{1785}$.

5. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{807}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^{-2}=1+i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4=1+i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=24+44x+30x^2+9x^3+x^4$, $Q(x)=-9+6x+8x^2-6x^3+x^4$, $R(x)=2x+3x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-2-3x+x^3$, $Q(x)=-6-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-4x-4x^2+x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 3 является корнем многочлена $P(x)=162-189x+81x^2-15x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-3+4x+3x^2-4x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-2x^2+x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-4x+7x^3-x^4-3x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-4-3x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2-3x+3x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-1.6x-2.x^2+5x^3$.

11. Докажите неравенство $84-110x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 2$.

Вариант 4.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+6i)(6+5i)$, $(6+2i):(2+1i)$, $(3+4i):(4+3i)$, $(6+6i):(6+5i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+5i$, $6(1+3i)$, $(3+3i)5$.

3. Вычислите i^{246}.

4. Вычислите $(\sqrt{3}-i)^{136}$.

5. Вычислите $(1-i)^{279}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=1-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8=1-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=18-15x-7x^2+3x^3+x^4$, $Q(x)=-9x+15x^2-7x^3+x^4$, $R(x)=-4+8x-5x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-2-3x+x^3$, $Q(x)=-6-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=-24+20x+2x^2-5x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена $P(x)=24-52x+38x^2-11x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=3+x-3x^2-x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-8-6x+8x^2+6x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+2x^3-x^4-2x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-2x-x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10-3x-9x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-2.6+0.7x-1.6x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $29-38x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 4$.

Вариант 5.

Комплексные числа

1. Вычислите $(4+1i)(1+1i)$, $(5+1i):(2+3i)$, $(6+6i):(4+6i)$, $(1+5i):(5+2i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $4+3i$, $5(2+3i)$, $(6+2i)5$.

3. Вычислите i^{964}.

4. Вычислите $(1+i)^{1900}$.

5. Вычислите $(-1-\sqrt{3}i)^{408}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^{-2}=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-6-5x+5x^2+5x^3+x^4$, $Q(x)=72+12x-30x^2-3x^3+3x^4$, $R(x)=2-x-2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=3-5x+x^2+x^3$, $Q(x)=-4+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-4x-4x^2+x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 4 является корнем многочлена $P(x)=24-50x+35x^2-10x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-8x-4x^2+2x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1+6x^2-5x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-4x^3+8x^4-5x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $1-3x-3x^2+5x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-4-2x-2x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=1.8-10.x-4.x^2+5x^3$.

11. Докажите неравенство $18-12x+7x^2-4x^3+x^4\geqslant 1$.

Вариант 6.

Комплексные числа

1. Вычислите $(1+5i)(3+4i)$, $(2+4i):(5+6i)$, $(3+3i):(6+2i)$, $(4+3i):(1+4i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $1+6i$, $2(6+6i)$, $(3+5i)1$.

3. Вычислите i^{1428}.

4. Вычислите $(1-\sqrt{3}i)^{583}$.

5. Вычислите $(1-\sqrt{3}i)^{1613}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3=1-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=1-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-12x+16x^2-7x^3+x^4$, $Q(x)=6+3x-9x^2-3x^3+3x^4$, $R(x)=-6x+x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=6+11x+6x^2+x^3$, $Q(x)=4-4x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-1$, где $P(x)=-4x^2+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена $P(x)=672-544x+162x^2-21x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-7-12x-2x^2+3x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=5-5x^2+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-x^2-2x^3+2x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-x+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2+x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=3.x+6.2x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $19-34x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 2$.

Вариант 7.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+5i)(3+5i)$, $(2+2i):(3+2i)$, $(1+5i):(4+4i)$, $(6+2i):(4+6i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+4i$, $2(1+4i)$, $(1+4i)5$.

3. Вычислите i^{1151}.

4. Вычислите $(-1+i)^{1785}$.

5. Вычислите $(\sqrt{3}-i)^{669}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4=-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-2x+5x^2-4x^3+x^4$, $Q(x)=-24+32x-2x^2-8x^3+2x^4$, $R(x)=2x-3x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-12-8x+x^2+x^3$, $Q(x)=-6+x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-8x-4x^2+2x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 3 является корнем многочлена $P(x)=36-60x+37x^2-10x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-4x+8x^2-5x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=3+x-3x^2-x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+2x^3-x^4-2x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-10-3x-9x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-0.4+0.6x+0.2x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $5-6x+7x^2-4x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 8.

Комплексные числа

1. Вычислите $(1+3i)(1+4i)$, $(6+6i):(1+6i)$, $(5+2i):(1+2i)$, $(4+5i):(1+5i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $1+1i$, $6(4+2i)$, $(5+1i)2$.

3. Вычислите i^{1456}.

4. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{1310}$.

5. Вычислите $(1-\sqrt{3}i)^{226}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3=1-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^0=1-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=9x-9x^2-x^3+x^4$, $Q(x)=-12x-8x^2+x^3+x^4$, $R(x)=12+16x+7x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=8+12x+6x^2+x^3$, $Q(x)=-1+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-6x+x^2+4x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 7 является корнем многочлена $P(x)=224-256x+102x^2-17x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-2+4x+2x^2-4x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1+3x+7x^2+5x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-x^3-x^4+x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-2x-3x^2+5x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-1-x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-1.2+0.8x+1.4x^2+x^3$.

11. Докажите неравенство $20-34x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 9.

Комплексные числа

1. Вычислите $(6+1i)(3+4i)$, $(3+2i):(3+6i)$, $(6+2i):(2+3i)$, $(3+2i):(1+5i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $6+3i$, $3(3+3i)$, $(6+3i)3$.

3. Вычислите i^{883}.

4. Вычислите $(1+i)^{388}$.

5. Вычислите $(-1+i)^{612}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3=-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4=-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=3-10x+12x^2-6x^3+x^4$, $Q(x)=-24-40x-14x^2+4x^3+2x^4$, $R(x)=2-x-2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=8-4x-2x^2+x^3$, $Q(x)=-3-2x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-1$, где $P(x)=-2+3x+x^2-3x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 7 является корнем многочлена $P(x)=1008-732x+196x^2-23x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=13-8x-7x^2+2x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=19+39x+29x^2+9x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+x^2-2x^4+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-1-4x+4x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10-23x+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=0.6-4.x+2.x^2+5x^3$.

11. Докажите неравенство $93-114x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 10.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+4i)(3+3i)$, $(6+5i):(2+6i)$, $(3+5i):(1+2i)$, $(6+5i):(6+4i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+6i$, $6(6+3i)$, $(3+6i)2$.

3. Вычислите i^{413}.

4. Вычислите $(\sqrt{3}+i)^{468}$.

5. Вычислите $(1-\sqrt{3}i)^{1843}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=12+8x-7x^2-2x^3+x^4$, $Q(x)=8-4x-6x^2+x^3+x^4$, $R(x)=-3+7x-5x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=2-x-2x^2+x^3$, $Q(x)=-6-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-1$, где $P(x)=4+12x+13x^2+6x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена $P(x)=180-216x+91x^2-16x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-2x^2+x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1+4x^2-4x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=-3+12x-9x^2-6x^3+12x^4-6x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $2-3x-9x^2+5x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-4-2x-2x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-0.1-0.9x+1.1x^2+x^3$.

11. Докажите неравенство $88-112x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 11.

Комплексные числа

1. Вычислите $(6+5i)(4+3i)$, $(1+3i):(3+5i)$, $(2+1i):(1+2i)$, $(3+4i):(5+4i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $6+3i$, $1(1+3i)$, $(2+5i)1$.

3. Вычислите i^{1475}.

4. Вычислите $(-1+\sqrt{3}i)^{92}$.

5. Вычислите $\sqrt{2}-\sqrt{2}i^{1339}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-9+18x-8x^2-2x^3+x^4$, $Q(x)=-6x-5x^2+2x^3+x^4$, $R(x)=-6x-x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-27-9x+3x^2+x^3$, $Q(x)=1+2x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=2x-x^2-2x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 3 является корнем многочлена $P(x)=126-165x+77x^2-15x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-4x-4x^2+x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-2x-x^2+2x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-4x+16x^2-25x^3+19x^4-7x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-2-x-x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-25-5x-8x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-x+x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $5-6x+7x^2-4x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 12.

Комплексные числа

1. Вычислите $(2+1i)(1+4i)$, $(3+5i):(5+6i)$, $(4+3i):(4+3i)$, $(5+6i):(2+5i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $2+6i$, $3(3+6i)$, $(4+1i)4$.

3. Вычислите i^{477}.

4. Вычислите $(\sqrt{3}+i)^{1554}$.

5. Вычислите $(1+i)^{57}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=-1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8=-1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-6+5x+5x^2-5x^3+x^4$, $Q(x)=-24+32x-2x^2-8x^3+2x^4$, $R(x)=3-5x+x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=2-3x+x^3$, $Q(x)=-2-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=6-x-7x^2+x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 5 является корнем многочлена $P(x)=540-468x+147x^2-20x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=25+4x-10x^2-x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1+x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-2x+9x^2-16x^3+14x^4-6x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-2-3x-2x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2-3x-2x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-0.1+0.8x+1.9x^2+x^3$.

11. Докажите неравенство $92-114x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 2$.

Вариант 13.

Комплексные числа

1. Вычислите $(1+1i)(3+5i)$, $(6+2i):(6+1i)$, $(5+3i):(3+4i)$, $(4+5i):(6+1i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $1+2i$, $6(3+6i)$, $(5+5i)3$.

3. Вычислите i^{1657}.

4. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{1924}$.

5. Вычислите $(-1+\sqrt{3}i)^{1997}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8=-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^2=-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=3+2x-4x^2-2x^3+x^4$, $Q(x)=-12x-14x^2+2x^4$, $R(x)=2-3x+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-12+16x-7x^2+x^3$, $Q(x)=-2+x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=3x-x^2-3x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 2 является корнем многочлена $P(x)=126-165x+77x^2-15x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=5-12x+13x^2-6x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-8x+12x^2-6x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+2x^2+x^3-3x^4-x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-5-4x-4x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10+3x-x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-1.7x-2.4x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $268-262x+97x^2-16x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 14.

Комплексные числа

1. Вычислите $(5+3i)(2+4i)$, $(4+4i):(5+1i)$, $(3+5i):(2+3i)$, $(2+6i):(5+6i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $5+4i$, $4(5+6i)$, $(3+6i)3$.

3. Вычислите i^{473}.

4. Вычислите $(-\sqrt{3}-i)^{587}$.

5. Вычислите $(1-i)^{1899}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=4-12x+13x^2-6x^3+x^4$, $Q(x)=9x^2+12x^3+3x^4$, $R(x)=2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-3-5x-x^2+x^3$, $Q(x)=-2+x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=-4x+3x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 2 является корнем многочлена $P(x)=160-192x+82x^2-15x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=10-24x+22x^2-8x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-2x^2+x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-x+x^2+2x^3-2x^4-x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-5-9x-8x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-25-20x-5x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=0.8+4.x+7.x^2+5x^3$.

11. Докажите неравенство $93-114x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 15.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+3i)(1+3i)$, $(6+1i):(3+6i)$, $(3+6i):(5+3i)$, $(6+5i):(2+5i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+1i$, $6(5+4i)$, $(3+4i)6$.

3. Вычислите i^{1444}.

4. Вычислите $(1-i)^{1818}$.

5. Вычислите $(1-\sqrt{3}i)^{685}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4 = 1-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4 = 1-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x) = -4+4x+3x^2-4x^3+x^4$, $Q(x) = -18+36x-16x^2-4x^3+2x^4$, $R(x) = 4+8x+5x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x) = 1$, где $P(x) = 12+16x+7x^2+x^3$, $Q(x) = 6-5x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x) = -12-20x-7x^2+2x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена $P(x) = 288-288x+106x^2-17x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 4+2x-4x^2-2x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1+18x+21x^2+8x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x = 1$ многочлена $P(x) = 1+2x+3x^2-2x^3-4x^4+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-2-3x-2x^2+2x^3 = 0$.

9. Оцените корни многочлена: $-1-x+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x) = -0.4x+1.6x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $85-110x+55x^2-12x^3+x^4 \geqslant 3$.

Вариант 16.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+4i)(3+6i)$, $(6+2i):(5+3i)$, $(3+1i):(2+6i)$, $(6+6i):(4+3i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+2i$, $6(6+6i)$, $(3+5i)2$.

3. Вычислите i^{575}.

4. Вычислите $(1-i)^{495}$.

5. Вычислите $(\sqrt{3}-i)^{1856}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4 = 1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8 = 1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x) = 3-2x-4x^2+2x^3+x^4$, $Q(x) = -4x^3+2x^4$, $R(x) = -4x+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x) = 1$, где $P(x) = 18-9x-2x^2+x^3$, $Q(x) = 1-2x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x) = -3-4x+2x^2+4x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 3 является корнем многочлена $P(x) = 150-185x+81x^2-15x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1+x^2+2x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1-2x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x = 1$ многочлена $P(x) = 1+2x^2+x^3-3x^4-x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-x-x^2+2x^3 = 0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10-8x-3x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x) = -2.6-4.5x+2.4x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $23-36x+25x^2-8x^3+x^4 \geqslant 3$.

Вариант 17.

Комплексные числа

1. Вычислите $(1+2i)(4+6i)$, $(2+4i):(5+3i)$, $(3+6i):(6+6i)$, $(4+2i):(2+3i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $1+3i$, $2(5+6i)$, $(3+1i)1$.

3. Вычислите i^{1599}.

4. Вычислите $(1+i)^{1220}$.

5. Вычислите $(-1-i)^{150}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8=-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8=-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-6x+11x^2-6x^3+x^4$, $Q(x)=4-2x-6x^2+2x^3+2x^4$, $R(x)=-2+5x-4x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=3+7x+5x^2+x^3$, $Q(x)=-6-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-2+3x+x^2-3x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 3 является корнем многочлена $P(x)=216-252x+102x^2-17x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-6x+x^2+4x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=17-32x+24x^2-8x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+4x-8x^2+x^3+7x^4-5x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-4-2x-2x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2-3x+5x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-3.4-1.4x+0.3x^2+x^3$.

11. Докажите неравенство $20-34x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 18.

Комплексные числа

1. Вычислите $(4+4i)(4+5i)$, $(5+1i):(5+2i)$, $(6+3i):(6+5i)$, $(1+5i):(1+2i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $4+5i$, $5(1+5i)$, $(6+3i)6$.

3. Вычислите i^{1401}.

4. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{1198}$.

5. Вычислите $(-1+\sqrt{3}i)^{701}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^2=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-2-5x-3x^2+x^3+x^4$, $Q(x)=x^2-2x^3+x^4$, $R(x)=9+3x-5x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-4+8x-5x^2+x^3$, $Q(x)=-3-2x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-18x+21x^2-8x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 3 является корнем многочлена $P(x)=882-693x+193x^2-23x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=5-5x^2+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-11-16x-x^2+4x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-2x+9x^2-16x^3+14x^4-6x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $1-3x+x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10-3x-4x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-3.4x-1.4x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $268-262x+97x^2-16x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 19.

Комплексные числа

1. Вычислите $(6+4i)(6+6i)$, $(5+4i):(6+3i)$, $(4+4i):(6+6i)$, $(3+3i):(6+3i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $6+2i$, $5(2+6i)$, $(4+1i)6$.

3. Вычислите i^{956}.

4. Вычислите $(-1+i)^{440}$.

5. Вычислите $\sqrt{2}-\sqrt{2}i^{948}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8=-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4=-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=9-12x-2x^2+4x^3+x^4$, $Q(x)=24x-12x^2-6x^3+3x^4$, $R(x)=-2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=1-x-x^2+x^3$, $Q(x)=4-4x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=-24+20x+2x^2-5x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена $P(x)=36-72x+47x^2-12x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-2x^2+x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=13-8x-7x^2+2x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=5-4x-7x^2+8x^3+2x^4-4x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $1-6x+4x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-4-2x-2x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-1.x-1.x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $267-262x+97x^2-16x^3+x^4\geqslant 2$.

Вариант 20.

Комплексные числа

1. Вычислите $(4+4i)(1+6i)$, $(3+4i):(1+3i)$, $(2+3i):(1+6i)$, $(1+3i):(1+3i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $4+2i$, $3(1+1i)$, $(2+1i)1$.

3. Вычислите i^{1056}.

4. Вычислите $(1-\sqrt{3}i)^{1408}$.

5. Вычислите $(1-i)^{917}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8=-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-8x-4x^2+2x^3+x^4$, $Q(x)=-3+6x-6x^3+3x^4$, $R(x)=2x+3x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-6+x+4x^2+x^3$, $Q(x)=-2-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=3x+7x^2+5x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 5 является корнем многочлена $P(x)=250-275x+105x^2-17x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1+3x-x^2-3x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-7+12x-2x^2-3x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+x^2-4x^3+6x^4-4x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-5x-4x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2+x+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=2x+2x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $14-10x+7x^2-4x^3+x^4\geqslant 4$.

Вариант 21.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+5i)(6+4i)$, $(6+2i):(5+1i)$, $(3+5i):(4+5i)$, $(6+2i):(3+2i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+6i$, $6(3+5i)$, $(3+6i)4$.

3. Вычислите i^{302}.

4. Вычислите $(-1+\sqrt{3}i)^{994}$.

5. Вычислите $(-1+\sqrt{3}i)^{806}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3=1+i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4=1+i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=6+x-7x^2-x^3+x^4$, $Q(x)=-24+40x-14x^2-4x^3+2x^4$, $R(x)=-3x-2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-6+x+4x^2+x^3$, $Q(x)=-2-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-6+5x+5x^2-5x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена $P(x)=432-396x+132x^2-19x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1+6x-5x^2-2x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-5-13x-7x^2+x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+8x-12x^2-2x^3+11x^4-6x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-2-x-9x^2+5x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10-8x-8x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-0.9+0.1x-3.5x^2+5x^3$.

11. Докажите неравенство $93-114x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 22.

Комплексные числа

1. Вычислите $(6+1i)(3+6i)$, $(3+4i):(2+3i)$, $(6+1i):(1+6i)$, $(3+4i):(6+4i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $6+2i$, $3(5+2i)$, $(6+2i)1$.

3. Вычислите i^{1641}.

4. Вычислите $(1+i)^{218}$.

5. Вычислите $(-1+\sqrt{3}i)^{1033}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=x-x^2-x^3+x^4$, $Q(x)=6x-7x^2+x^4$, $R(x)=x+2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=2-x-2x^2+x^3$, $Q(x)=4+4x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=4x-3x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 1 является корнем многочлена $P(x)=42-83x+53x^2-13x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=3-x-3x^2+x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=13-8x-7x^2+2x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-x^2-2x^3+2x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $1-2x-x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2-3x-2x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=1.9-2.9x-2.8x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $99-116x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 2$.

Вариант 23.

Комплексные числа

1. Вычислите $(2+3i)(2+2i)$, $(3+4i):(6+5i)$, $(4+4i):(4+3i)$, $(5+5i):(2+6i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $2+1i$, $3(1+6i)$, $(4+2i)4$.

3. Вычислите i^{723}.

4. Вычислите $(-\sqrt{3}-i)^{1561}$.

5. Вычислите $(\sqrt{3}+i)^{1647}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^1=-1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8=-1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=2-x-3x^2+x^3+x^4$, $Q(x)=-18+3x+13x^2-7x^3+x^4$, $R(x)=-3x-2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-3-x+3x^2+x^3$, $Q(x)=-6-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-12-16x-x^2+4x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 5 является корнем многочлена $P(x)=200-230x+93x^2-16x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-3x-x^2+3x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-4x-4x^2+x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-4x^3+8x^4-5x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-2-3x+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-4-2x+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-2.6+0.7x-0.3x^2+x^3$.

11. Докажите неравенство $20-34x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 24.

Комплексные числа

1. Вычислите $(4+2i)(3+4i)$, $(5+2i):(1+2i)$, $(6+3i):(5+6i)$, $(1+3i):(3+3i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $4+5i$, $5(6+6i)$, $(6+6i)4$.

3. Вычислите i^{1947}.

4. Вычислите $(1+i)^{1505}$.

5. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{573}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8=-1+i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^1=-1+i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=4x-3x^3+x^4$, $Q(x)=4-14x+18x^2-10x^3+2x^4$, $R(x)=2-3x+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-6-7x+x^3$, $Q(x)=2-3x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=36+12x-11x^2-2x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 7 является корнем многочлена $P(x)=700-555x+163x^2-21x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-4x^2+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-5+13x-7x^2-x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-4x^3+8x^4-5x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $2-5x-2x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10+3x-3x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=0.7+2.4x+5.5x^2+5x^3$.

11. Докажите неравенство $23-36x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 25.

Комплексные числа

1. Вычислите $(5+2i)(4+1i)$, $(4+6i):(1+5i)$, $(3+4i):(4+3i)$, $(2+2i):(1+6i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $5+2i$, $4(6+1i)$, $(3+4i)4$.

3. Вычислите i^{1241}.

4. Вычислите $(1+i)^{633}$.

5. Вычислите $(\sqrt{3}-i)^{1455}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=1-i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=1-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=4x-3x^3+x^4$, $Q(x)=-48-40x+4x^2+10x^3+2x^4$, $R(x)=-4-4x+x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-3+7x-5x^2+x^3$, $Q(x)=-6+x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=-4+8x-3x^2-2x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 7 является корнем многочлена $P(x)=42-83x+53x^2-13x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=17-8x^2+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-7-4x+6x^2+5x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-x+5x^2-10x^3+10x^4-5x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-4x-8x^2+5x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2-9x-5x^2+5x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=0.5-2.x+1.x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $268-262x+97x^2-16x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 26.

Комплексные числа

1. Вычислите $(2+4i)(4+6i)$, $(1+2i):(1+4i)$, $(6+6i):(4+1i)$, $(5+4i):(1+5i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $2+4i$, $1(2+1i)$, $(6+6i)4$.

3. Вычислите i^{752}.

4. Вычислите $(-1+\sqrt{3}i)^{761}$.

5. Вычислите $(1-i)^{259}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^0=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=8-20x+18x^2-7x^3+x^4$, $Q(x)=-8x-8x^2+2x^3+2x^4$, $R(x)=-6-5x+2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-3-x+3x^2+x^3$, $Q(x)=4-4x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=-4x+8x^2-5x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 2 является корнем многочлена $P(x)=48-92x+56x^2-13x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-6x+x^2+4x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-6x^2+x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+2x^2-7x^3+9x^4-5x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-1-x+x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2-x-x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-0.9+0.1x-0.8x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $92-114x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 2$.

Вариант 27.

Комплексные числа

1. Вычислите $(5+1i)(2+2i)$, $(2+3i):(4+6i)$, $(5+4i):(6+3i)$, $(2+6i):(2+1i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $5+4i$, $2(6+3i)$, $(5+1i)5$.

3. Вычислите i^{542}.

4. Вычислите $(1-i)^{1390}$.

5. Вычислите $(1-i)^{53}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8 = 1+i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3 = 1+i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x) = -6x - 7x^2 + x^4$, $Q(x) = -27x - 27x^2 + 3x^3 + 3x^4$, $R(x) = 8 - 4x - 2x^2 + x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1$, где $P(x) = -18 - 9x + 2x^2 + x^3$, $Q(x) = -2 - x + x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x) = 6x - 7x^2 + x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 5 является корнем многочлена $P(x) = 900 - 660x + 181x^2 - 22x^3 + x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1 + 12x - 8x^2 - x^3 + x^4$.

7. Укажите кратность корня $x = 1$ многочлена $P(x) = 1 - x + x^2 + 2x^3 - 2x^4 - x^5 + x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $2 - 3x - x^2 + x^3 = 0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10 - 3x - 4x^2 + x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x) = -1.9 - 8.5x + 3.1x^2 + x^3$.

11. Докажите неравенство $99 - 116x + 55x^2 - 12x^3 + x^4 \geqslant 2$.

Вариант 28.

Комплексные числа

1. Вычислите $(5+5i)(2+1i)$, $(2+6i):(4+5i)$, $(5+2i):(6+3i)$, $(2+3i):(1+6i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $5+2i$, $2(3+3i)$, $(5+5i)5$.

3. Вычислите i^{862}.

4. Вычислите $(-1+i)^{31}$.

5. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{531}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3 = 1+i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4 = 1+i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x) = -x^2 + x^4$, $Q(x) = -16 - 8x + 12x^2 + 10x^3 + 2x^4$, $R(x) = -4 + 8x - 5x^2 + x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1$, где $P(x) = -4 + 3x^2 + x^3$, $Q(x) = 4 - 4x + x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x) = 8x - 4x^2 - 2x^3 + x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена $P(x) = 18 - 45x + 37x^2 - 11x^3 + x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1 - 6x - 5x^2 + 2x^3 + x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1 + 12x - 8x^2 - x^3 + x^4$.

7. Укажите кратность корня $x = 1$ многочлена $P(x) = 1 + 2x - 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 - 4x^5 + x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-10x + x^2 + 2x^3 = 0$.

9. Оцените корни многочлена: $-5 - 9x - 8x^2 + 2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x) = -1.6x + 0.4x^2 + 2x^3$.

11. Докажите неравенство $22 - 36x + 25x^2 - 8x^3 + x^4 \geqslant 2$.

Вариант 29.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+2i)(5+6i)$, $(4+1i):(5+4i)$, $(5+6i):(6+2i)$, $(6+5i):(1+6i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+2i$, $4(1+5i)$, $(5+6i)6$.

3. Вычислите i^{1356}.

4. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{1774}$.

5. Вычислите $(-1-\sqrt{3}i)^{618}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^{-2}=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=4x-4x^2-x^3+x^4$, $Q(x)=36-78x+58x^2-18x^3+2x^4$, $R(x)=-2-x+2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-18-9x+2x^2+x^3$, $Q(x)=-2-x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-6x+x^2+4x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 4 является корнем многочлена $P(x)=160-192x+82x^2-15x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-18x-9x^2+2x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-3x-x^2+3x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-2x^4-x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $2-5x+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-5+4x-x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=1.2+3.2x+3.2x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $258-258x+97x^2-16x^3+x^4\geqslant 1$.

Вариант 30.

Комплексные числа

1. Вычислите $(6+4i)(2+1i)$, $(1+3i):(3+5i)$, $(2+2i):(4+3i)$, $(3+1i):(5+1i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $6+4i$, $1(2+2i)$, $(2+1i)3$.

3. Вычислите i^{1128}.

4. Вычислите $(1+i)^{1385}$.

5. Вычислите $(\sqrt{3}-i)^{1569}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-24+20x+2x^2-5x^3+x^4$, $Q(x)=6x-5x^2-2x^3+x^4$, $R(x)=-2x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-2-x+2x^2+x^3$, $Q(x)=4-4x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-1$, где $P(x)=36-13x^2+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 5 является корнем многочлена $P(x)=500-425x+135x^2-19x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-11+4x+9x^2-6x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-7-12x-2x^2+3x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1+2x^3-x^4-2x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-10x+3x^2+x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2+x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-1.2x+0.8x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $20-34x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 3$.

Вариант 31.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+6i)(6+3i)$, $(2+3i):(6+1i)$, $(1+5i):(5+5i)$, $(6+2i):(5+3i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+3i$, $2(6+5i)$, $(1+2i)5$.

3. Вычислите i^{119}.

4. Вычислите $(\sqrt{3}-i)^{1075}$.

5. Вычислите $(-1-\sqrt{3}i)^{1973}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4 = 1+i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3 = 1+i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x) = -x - x^2 + x^3 + x^4$, $Q(x) = -36 - 54x - 14x^2 + 6x^3 + 2x^4$, $R(x) = -2 - x + 2x^2 + x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1$, где $P(x) = -2 + 5x - 4x^2 + x^3$, $Q(x) = 2 + 3x + x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x) = -2 + 3x + x^2 - 3x^3 + x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 3 является корнем многочлена $P(x) = 81 - 108x + 54x^2 - 12x^3 + x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1 - 12x - 4x^2 + 3x^3 + x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1 + 3x^2 - 4x^3 + x^4$.

7. Укажите кратность корня $x = 1$ многочлена $P(x) = 1 + x^3 - x^4 - x^5 + x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $2 - 5x - 2x^2 + 2x^3 = 0$.

9. Оцените корни многочлена: $-1 - x + 2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x) = -0.4 - 0.2x + 2.4x^2 + x^3$.

11. Докажите неравенство $261 - 260x + 97x^2 - 16x^3 + x^4 \geqslant 1$.

Вариант 32.

Комплексные числа

1. Вычислите $(1+2i)(5+4i)$, $(6+5i):(4+2i)$, $(5+1i):(4+1i)$, $(4+4i):(4+5i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $1+5i$, $6(1+4i)$, $(5+4i)4$.

3. Вычислите i^{1473}.

4. Вычислите $(-1-\sqrt{3}i)^{1736}$.

5. Вычислите $(-\sqrt{3}-i)^{913}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8 = 1+i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3 = 1+i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x) = 6 + x - 7x^2 - x^3 + x^4$, $Q(x) = -9 + 12x + 6x^2 - 12x^3 + 3x^4$, $R(x) = -3x - 2x^2 + x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x) + B(x)Q(x) = 1$, где $P(x) = 6 - 5x - 2x^2 + x^3$, $Q(x) = -2 - x + x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-1$, где $P(x) = 2x + 5x^2 + 4x^3 + x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 4 является корнем многочлена $P(x) = 160 - 192x + 82x^2 - 15x^3 + x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = -8 + 6x + 8x^2 - 6x^3 + x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x) = 1 + 3x - x^2 - 3x^3 + x^4$.

7. Укажите кратность корня $x = 1$ многочлена $P(x) = 1 - x^2 + 2x^3 - 2x^5 + x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-5 - 9x - 8x^2 + 2x^3 = 0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2 + 2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x) = 0.4 - 3.x + 3.x^2 + 5x^3$.

11. Докажите неравенство $29 - 38x + 25x^2 - 8x^3 + x^4 \geqslant 4$.

Вариант 33.

Комплексные числа

1. Вычислите $(5+2i)(5+5i)$, $(2+2i):(4+3i)$, $(5+2i):(3+1i)$, $(2+2i):(2+6i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $5+2i$, $2(2+3i)$, $(5+2i)2$.

3. Вычислите i^{787}.

4. Вычислите $(1+i)^{1045}$.

5. Вычислите $(-1-i)^{21}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=1+i$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8=1+i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-12+16x-x^2-4x^3+x^4$, $Q(x)=-4x^3+2x^4$, $R(x)=6x-5x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=12-4x-3x^2+x^3$, $Q(x)=1+2x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=-8x-4x^2+2x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 2 является корнем многочлена $P(x)=180-216x+91x^2-16x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=-23+20x+2x^2-5x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-12x-4x^2+3x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-8x+28x^2-38x^3+25x^4-8x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-1-x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-10-5x+3x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=1.2+5.x+6.2x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $26-38x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 1$.

Вариант 34.

Комплексные числа

1. Вычислите $(5+3i)(1+4i)$, $(2+3i):(6+3i)$, $(5+3i):(4+1i)$, $(2+3i):(3+6i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $5+3i$, $2(3+5i)$, $(5+3i)4$.

3. Вычислите i^{473}.

4. Вычислите $(-1-i)^{1592}$.

5. Вычислите $(-1-\sqrt{3}i)^{1800}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^4=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=x+3x^2+3x^3+x^4$, $Q(x)=-9x-15x^2-3x^3+3x^4$, $R(x)=-3-5x-x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-4+8x-5x^2+x^3$, $Q(x)=2+3x+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-3x^2-2x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 4 является корнем многочлена $P(x)=64-96x+52x^2-12x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=19+15x-7x^2-3x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1+2x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-4x+7x^3-x^4-3x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-5-9x-8x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-2-3x+4x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-1.9-2.8x+0.1x^2+x^3$.

11. Докажите неравенство $86-112x+55x^2-12x^3+x^4\geqslant 1$.

Вариант 35.

Комплексные числа

1. Вычислите $(3+1i)(3+6i)$, $(4+5i):(1+4i)$, $(5+2i):(5+3i)$, $(6+6i):(3+1i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа $3+4i$, $4(1+6i)$, $(5+5i)4$.

3. Вычислите i^{875}.

4. Вычислите $(1-i)^{92}$.

5. Вычислите $(-1+i)^{1815}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^4=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=-6x-5x^2+2x^3+x^4$, $Q(x)=2+x-3x^2-x^3+x^4$, $R(x)=1-x-x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где $P(x)=-18+21x-8x^2+x^3$, $Q(x)=-1+x^2$.

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-3$, где $P(x)=18+39x+29x^2+9x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 3 является корнем многочлена $P(x)=324-324x+117x^2-18x^3+x^4$, найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=17-32x+24x^2-8x^3+x^4$.

6. Найдите все целые корни многочлена $P(x)=1-6x-5x^2+2x^3+x^4$.

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена $P(x)=1-2x+9x^2-16x^3+14x^4-6x^5+x^6$.

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел: $-x-x^2+2x^3=0$.

9. Оцените корни многочлена: $-4-8x+x^2+2x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=0.6+2.3x+1.6x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство $27-38x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 2$.

Вариант 36.

Комплексные числа

1. Вычислите $(5+3i)(4+1i)$, $(4+4i):(6+6i)$, $(3+5i):(3+5i)$, $(2+6i):(6+3i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа
$$5+3i, 3(5+3i), (6+1i)5.$$

3. Вычислите i^{1763}.

4. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{1511}$.

5. Вычислите $(1-\sqrt{3}i)^{374}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^8=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^8=1-i$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=4-4x-3x^2+2x^3+x^4$, $Q(x)=8-10x^2+2x^4$, $R(x)=2+5x+4x^2+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где
$$P(x)=8+12x+6x^2+x^3, Q(x)=-2-x+x^2.$$

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-6+5x+5x^2-5x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена
$$P(x)=288-312x+116x^2-18x^3+x^4,$$
найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена
$$P(x)=1-6x+x^2+4x^3+x^4.$$

6. Найдите все целые корни многочлена
$$P(x)=-11+16x-x^2-4x^3+x^4.$$

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена
$$P(x)=1+2x^2+x^3-3x^4-x^5+x^6.$$

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел:
$$1-4x-x^2+x^3=0.$$

9. Оцените корни многочлена: $-2-x-x^2+x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=-0.6+1.4x+1.7x^2+x^3$.

11. Докажите неравенство
$$20-34x+25x^2-8x^3+x^4\geqslant 3.$$

Вариант 37.

Комплексные числа

1. Вычислите $(5+1i)(2+2i)$, $(4+2i):(5+6i)$, $(3+3i):(2+5i)$, $(2+4i):(4+4i)$.

2. Приведите к тригонометрической форме числа
$$5+6i, 1(6+4i), (3+3i)1.$$

3. Вычислите i^{2004}.

4. Вычислите $(-1-\sqrt{3}i)^{650}$.

5. Вычислите $(1+\sqrt{3}i)^{1657}$.

6. Найдите все комплексные корни $x^2=1$.

7. Найдите все комплексные корни $x^3=-1$.

Операции над многочленами

1. Найдите НОД многочленов $P(x)=4x-4x^2-x^3+x^4$, $Q(x)=8x-6x^3+2x^4$, $R(x)=-4x+x^3$.

2. Найдите с помощью метода неопределенных коэффициентов многочлены $A(x)$ и $B(x)$ такие, что $A(x)P(x)+B(x)Q(x)=1$, где
$$P(x)=-8-4x+2x^2+x^3, Q(x)=-1+x^2.$$

3. Разложите многочлен $P(x)$ по степеням $x-2$, где $P(x)=-12x+16x^2-7x^3+x^4$.

Корни многочленов

4. Зная, что 6 является корнем многочлена
$$P(x)=72-108x+58x^2-13x^3+x^4,$$
найдите остальные корни.

5. Найдите все целые корни многочлена
$$P(x)=1-2x^2+x^3+x^4.$$

6. Найдите все целые корни многочлена
$$P(x)=-3+8x-3x^2-2x^3+x^4.$$

7. Укажите кратность корня $x=1$ многочлена
$$P(x)=1-x+x^2+2x^3-2x^4-x^5+x^6.$$

8. Решите уравнение в поле комплексных чисел:
$$1-25x-6x^2+2x^3=0.$$

9. Оцените корни многочлена: $-2-3x-8x^2+5x^3$.

10. Исследуйте многочлен $P(x)$ как функцию. Методом Ньютона вычислите наибольший корень многочлена: $P(x)=5x^2+2x^3$.

11. Докажите неравенство
$$264-260x+97x^2-16x^3+x^4\geqslant 4.$$

Вариант 1.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,5,1,4,0), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (0,3,2,1,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,0,2,5,2), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (-2,-2,3,1,-2). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,-2,1)$, $\mathbf{e}_2 = (-2,3,1)$, $\mathbf{e}_3 = (1,1,2)$;
$\mathbf{g}_1 = (-1,4,4)$, $\mathbf{g}_2 = (2,2,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,0,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 4x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 2x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 3x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 2x^2 + 3x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,4,-2,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,2,-1,4,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,-1,0,0,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,3,1,1,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,0,2,5,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,-2,3,1,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,3,1,4,1), L_1)$ и $M_2((5,-1,3,4,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,0,5,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,5,-2,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 2.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,4,5,5,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,3,4,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,3,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,3,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,5,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_3 = (5,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 4x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 2x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (0,0,-1,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,0,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2,3,1,4,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (4,-2,2,4,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-1,4,3,1,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (2,2,4,5,0)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((2,-1,2,-1,5), L_1)$ и $M_2((0,2,3,0,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (1,3,-2,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,1,-1,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 3.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,5,4,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,3,3,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,5,5,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,4,5,4). \end{aligned}$$
Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (4,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 3x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 2x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$
базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (3,2,2,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,5,2,1,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,2,-1,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-1,3,2,3,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,5,1,2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (5,0,1,0,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((5,1,0,1,2), L_1)$ и $M_2((3,5,-1,5,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,4,-1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,-2,-2,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$
Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 4.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,5,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,5,4,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,5,5,3,4). \end{aligned}$$
Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,3,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (4,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 5x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 3x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 2x - 3 \end{aligned}$$
базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 5x^2 + 5x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,4,-1,5,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,-1,3,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,-1,1,3)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,5,-2,5,1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,-1,-2,3,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,1,-2,1,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,3,4,2,5), L_1)$ и $M_2((2,-1,4,-1,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-2,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,0,3,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$
Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 5.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,3,4,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,4,3,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,5,5,5),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,3,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,5,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,4,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 3x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 2x + 5,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2\\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,-2,-1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,0,5,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,-1,4,-1,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,4,1,-1,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,3,0,-1,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,2,-1,-1,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,0,-2,-2,5), L_1)$ и $M_2((1,5,3,-2,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,1,0,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,0,-1,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0\\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 6.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,3,5,3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,4,4,3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,5,3,3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,4,5,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,3,3)$, $\mathbf{e}_2 = (5,3,4)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 2x + 2,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 5x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,2,-1,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,5,-1,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,4,-1,3)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,4,2,-1,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,3,1,-2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,2,0,-2,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,0,-2,-2,-2), L_1)$ и $M_2((4,5,4,-2,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,1,0,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,-1,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 7.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,4,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,5,4,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,4,3,3,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,3,3,5,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,4)$, $\mathbf{e}_2 = (5,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (4,4,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,4)$, $\mathbf{g}_2 = (4,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 4x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 3x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 2x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,1,1,3,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,5,-1,5,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,0,5,-1,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,-2,1,2,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (2,2,-2,4,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,5,4,-2,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,-1,3,4,2), L_1)$ и $M_2((-1,5,-1,0,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (4,-1,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,2,-2,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 8.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,4,3,3,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,3,3,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,3,3,3,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,4)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (3,4,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,3,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 5x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-2,0,-2,1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3,4,3,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,-2,1,5,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (2,5,5,0,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,0,3,2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (0,3,1,4,1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((0,5,-1,2,1), L_1)$ и $M_2((-2,3,3,-2,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (3,5,5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,0,3,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 9.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,3,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,3,3,3,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,5,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (4,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 5x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 5x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 5x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,2,4,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,2,1,3,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,1,-2,-1,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,1,-1,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,1,4,2,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,0,1,-2,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,-1,0,3,0), L_1)$ и $M_2((5,-2,2,2,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,5,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,5,5,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 10.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,3,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,4,5,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,3,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,3,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,3,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,5)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 2x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 2x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 5x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (0,-2,4,4,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,-2,1,0,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2,-2,-2,3,0)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (4,5,0,2,2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-1,5,4,-2,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (2,5,1,2,5)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((2,3,0,-1,-2), L_1)$ и $M_2((0,2,2,-2,1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,2,5,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 11.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,5,3,5,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,4,4,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,5,4,4),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,3,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,3,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,3,3)$, $\mathbf{e}_3 = (5,4,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (5,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 3x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 4x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 4x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,-2,5,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,-1,2,3,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,4,-2,0,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-1,4,5,3,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,0,1,0,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (5,5,5,-2,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((5,-1,4,2,1), L_1)$ и $M_2((3,0,4,4,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,5,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,1,4,2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 12.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,4,3,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,5,5,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,4,3,5,4),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,4,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (5,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (3,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,4)$, $\mathbf{g}_2 = (3,5,5)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 2x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 3x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 5x^2 + 2x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5\\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,-2,2,-1,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,-2,5,-2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,-2,2,2,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,-1,2,5,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,3,5,3,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,-1,1,0,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,2,1,4,5), L_1)$ и $M_2((2,2,0,-1,4), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-1,4,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,3,0,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0\\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 13.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,4,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,4,4,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,4,4,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,4,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (5,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,5,5)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 2x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 3x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,5,-1,3,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,-2,2,2,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,-1,5,1,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,0,3,0,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,1,-2,-1,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,2,1,-2,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,0,0,1,3), L_1)$ и $M_2((1,2,-2,-1,-2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,4,-1,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,2,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 14.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,5,5,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,4,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,5,5,5,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,5,4,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,3,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,5,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_3 = (5,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 4x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 5x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,-2,-1,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,-1,2,2,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,5,2,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,1,3,0,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,2,-2,-1,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,3,1,-1,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,1,0,1,5), L_1)$ и $M_2((4,3,-2,0,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,-1,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-2,2,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 15.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,3,4,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,5,3,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,4,3,5),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,3,3,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,4,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 2x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 3x + 4,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 4 & 0\\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 4 & 4 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 3 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (0,0,0,1,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,5,2,2,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2,2,4,3,3)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (4,5,0,5,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,2,2,-2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (2,0,4,-1,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((2,2,3,1,-2), L_1)$ и $M_2((0,5,-1,3,-2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,5,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,2,-1,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 0 & 5 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 16.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,4,4,5),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,3,4,3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,5,4,3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,4,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,4,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 5x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 2x + 4,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 3 & -1\\ 5 & 2 & -2 & 4 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-2,4,-1,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,4,-2,0,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,1,0,1,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,4,4,4,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (2,1,-2,5,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,-1,0,-2,3)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,1,-1,-1,0), L_1)$ и $M_2((-1,4,3,1,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (4,4,1,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,1,3,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 17.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,5,5,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,3,5,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,4,5,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,5,5,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,3,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (4,5,3)$, $\mathbf{g}_3 = (5,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 4x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 2x^2 + 5x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 4 & 5 \end{array} \right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-2,3,1,-1,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,5,2,2,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,-1,3,5,-1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (2,2,5,3,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,4,-2,-2,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (0,-2,-1,1,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многобразий $M_1((0,5,-2,1,4), L_1)$ и $M_2((-2,1,0,-1,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-2,3,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,0,4,3)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 18.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,4,3,3,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,3,4,3,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,5,5,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,3,3,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (5,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 3x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 5x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 3x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,2,2,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,4,2,2,-1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,-1,4,0,2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,1,5,3,0)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,3,-2,5,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многобразий $M_1((3,2,-2,5,3), L_1)$ и $M_2((1,-2,0,3,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,3,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,4,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 19.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,5,4,4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,3,5,4,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,5,4,3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,5,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (4,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,3,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 5x + 2,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 3x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 & 4\\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1\\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 & 5\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,-1,1,-2,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,1,3,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,4,1,0,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,0,1,1,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-1,-1,1,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,5,1,3,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,0,0,1,3), L_1)$ и $M_2((4,5,0,3,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (1,0,0,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-1,0,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 0\\ 3 & -1 & 5 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 4 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 20.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,5,3,4,3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,5,3,4,4),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,3,4,5),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,3,4,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 2x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 4x + 2,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 3x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -1 & -1 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (3,2,4,1,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,4,5,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1,-1,4,2,3)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-1,4,4,4,3)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,2,4,1,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (5,0,4,5,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((5,4,4,4,1), L_1)$ и $M_2((3,0,4,-2,1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,4,4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,2,4,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 21.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,4,5,4,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,4,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,5,5,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,5,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,5,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,5,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 4x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 3x + 5, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 2x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,4,0,5,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,-2,-1,4,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,-2,3,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,-1,4,0,0)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,2,3,-1,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,5,2,5,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,4,2,2,4), L_1)$ и $M_2((2,2,0,0,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,-2,4,2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 22.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,3,4,5,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,3,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,3,5,5,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,4,3,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,4,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 2x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 3x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,0,-2,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,-1,5,-1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,3,-2,3,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,1,4,1,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,4,3,-1,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,-1,2,-2,1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,-2,2,3,1), L_1)$ и $M_2((5,4,0,0,5), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,4,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,4,3)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 23.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,3,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,5,4,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,5,3,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,3,3,3,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_2 = (5,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,4,3)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 2x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 2x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 5x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 4x^2 + 3x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,-1,5,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,0,5,-2,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,0,3,-2,-2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,-1,-1,-1,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,-2,5,0,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,-2,3,0,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,1,3,4,-1), L_1)$ и $M_2((1,0,-1,5,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,-2,1,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,-2,-1,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 24.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,5,5,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,3,4,3,4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,5,3,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (3,5,3)$, $\mathbf{e}_3 = (4,3,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{g}_3 = (5,5,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 2x^2 + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 5x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (0,1,2,4,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,0,0,4,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2,-1,-2,5,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (4,-2,2,-2,1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,-2,0,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (2,5,-2,-1,1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((2,1,-1,3,2), L_1)$ и $M_2((0,0,3,4,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,-2,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,3,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 25.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,4,5,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,4,5,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,5,4,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,3,4,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$\mathbf{e}_1 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,5,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 5x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 5x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 5x^2 + 3x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 5 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-1,5,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,2,0,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,-1,-1,2,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,-1,1,-1,5)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,3,-2,1,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,-1,3,3,2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,-1,4,-2,4), L_1)$ и $M_2((-1,-1,-2,2,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,2,5,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,-2,2,4)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 26.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,4,3,5,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,4,3,4,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$\mathbf{e}_1 = (3,5,3)$, $\mathbf{e}_2 = (5,3,3)$, $\mathbf{e}_3 = (4,4,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,3)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 3x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 3x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,5,4,2,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,1,1,5,4)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,5,-1,-1,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,5,1,4,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,1,-2,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,5,3,0,3)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,4,3,3,5), L_1)$ и $M_2((2,4,5,-1,1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (3,0,4,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,4,1,0)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 27.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,4,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,5,5,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,4,4,3,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,5,3,4,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (5,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,4,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (5,5,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 5x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 5x + 5, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 2x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,-2,3,-2,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,-2,-1,2,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,-1,3,-2,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,0,3,-1,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,0,-1,3,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,1,3,-1,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,5,4,0,2), L_1)$ и $M_2((5,-2,4,0,3), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,-1,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,0,4,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 28.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,5,4,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,4,4,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,3,3,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,5,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (5,4,3)$, $\mathbf{e}_3 = (5,3,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,5)$, $\mathbf{g}_2 = (5,4,4)$, $\mathbf{g}_3 = (5,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 5x^2 + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 2x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (5,2,-2,1,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,2,2,5,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3,3,-2,1,5)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,4,-2,2,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,4,2,-2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-1,5,-2,2,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-1,1,-1,3,2), L_1)$ и $M_2((5,2,-1,3,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,3,3,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,4,-1,4)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 29.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,3,3,4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,4,4,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,5,5,4),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,5,3,3,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,3,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,5,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,4,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 5x^2 + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 2x + 2,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,0,-1,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,2,3,5,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,-1,-2,3,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,1,5,-1,1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,-2,0,5,4)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,3,3,3,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,4,3,3,2), L_1)$ и $M_2((4,-2,2,-1,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,2,-2,-1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 30.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,5,3,3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,3,4,4),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,4,5,3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,5,3,4). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,4,5)$, $\mathbf{e}_2 = (5,3,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (4,4,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 4x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 5x + 5,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 2x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 3 & -1\\ 5 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 5 & -2 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,-1,-1,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,4,2,-2,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,2,5,4,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,4,3,0,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (-2,1,-1,-2,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,-2,2,4,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,-2,2,4,0), L_1)$ и $M_2((-1,0,1,0,5), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (0,-1,2,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4,5,0)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 4 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 31.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,5,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,3,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,3,3,5,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,5,5)$, $\mathbf{e}_2 = (5,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,4,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (4,5,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,4)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 4x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (2,5,5,1,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,-1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,1,1,0,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (-2,4,5,0,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,5,-1,0,2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (4,-1,2,-1,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((4,3,2,-2,4), L_1)$ и $M_2((2,-2,-1,-2,5), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,3,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,4,-1,5)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 32.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,5,5,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,5,5,3,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,4,5,4,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,5,5,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (4,5,4)$, $\mathbf{e}_3 = (3,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_3 = (5,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 3x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 4x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 2x - 3 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 4x^2 + 2x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & -1 & 4 \end{array} \right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,-2,0,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-1,2,0,4)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,1,4,-1,1)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,4,0,-1,2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (4,-2,2,-1,-1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,-1,4,-1,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,4,5,5,1), L_1)$ и $M_2((1,-1,1,5,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-2,3,0,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,2,4)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 33.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,4,3,3,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,5,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,4,3,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,4,3,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,3,3)$, $\mathbf{e}_3 = (3,3,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,3)$, $\mathbf{g}_2 = (3,3,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 4x^2 + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 2x + 5, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,-2,1,3,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,2,4,0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,3,3,-2,-2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,-1,-2,1,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,5,-1,3,3)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,3,0,4,1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,3,1,2,0), L_1)$ и $M_2((1,0,3,5,5), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,2,-1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,0,0,3)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 34.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3,5,3,3,4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,5,5,4,4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,5,3,5,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3,5,5,4,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,5)$, $\mathbf{e}_3 = (3,4,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,4,5)$, $\mathbf{g}_2 = (3,4,4)$, $\mathbf{g}_3 = (3,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^3 - 3x^2 + 2, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^3 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^3 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^3 + 5x^2 + 3x + 3$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,0,0,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,3,1,2,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (2,1,2,3,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (0,5,4,-2,-1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (3,3,5,0,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (-2,1,-2,2,5)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((-2,2,0,-1,3), L_1)$ и $M_2((4,-2,2,2,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (5,0,5,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,-2,-2,1)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 35.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_5[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= (4,3,5,4,4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (5,4,5,5,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,4,3,4,3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,5,4,5,4).\end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (5,4,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,5,5)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,3)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (4,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (5,4,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 3\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 2\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 5\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= 5x^3 - 3x^2 + 4,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^3 + 5x + 4,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^3 + 4x - 4\end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 3 & -1\\ 5 & 2 & -2 & 4 & 2 & 2\\ -2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 2 & 2 & 5 & 2\end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-1,0,5,5,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2,3,5,0,1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (5,5,5,4,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (3,2,5,3,4)$, $\boldsymbol{w}_2 = (2,5,5,-2,5)$, $\boldsymbol{w}_3 = (1,0,-2,2,-2)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((1,4,-1,-2,5), L_1)$ и $M_2((-1,2,-1,5,-1), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (4,1,0,-1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4,0,3)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & -2 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0\end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 36.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= (5,3,4,3,4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,3,5,5,5),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4,3,3,3,3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,4,4,5,4).\end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,4,3)$, $\mathbf{e}_2 = (4,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,4,5)$;
$\mathbf{g}_1 = (4,5,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,3,5)$, $\mathbf{g}_3 = (3,3,5)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 3x^2 + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 2x + 2,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 4x - 2\end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 4x^2 + 4x + 5$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 & 2 & -2\\ 4 & 1 & 5 & 3 & 1 & 1\\ 5 & 5 & 2 & 2 & -1 & -1\\ 3 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1\end{array}\right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-2,5,-1,0,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,-1,-1,4,3)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,2,-1,-1,4)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (2,-1,0,-2,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,2,0,2,-2)$, $\boldsymbol{w}_3 = (0,4,0,5,-1)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((0,1,1,1,-2), L_1)$ и $M_2((-2,-2,2,0,0), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (3,-2,2,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,2,-2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & -1 & 5 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 5 & 5 & 0\end{array}\right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 37.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_4[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (5,3,3,4,5), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4,4,3,3,5), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3,5,3,5,5), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (5,3,3,3,5). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (4,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (3,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (5,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{g}_2 = (5,4,3)$, $\mathbf{g}_3 = (4,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^3 - 2x^2 + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^3 + 5x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^3 + 4x - 5 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^3 + 4x^2 + 2x + 2$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 5 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 5 & 4 & 5 \end{array} \right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (-2,2,0,0,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,1,-1,5,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (4,0,-2,2,0)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (2,-1,4,5,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (5,-2,4,2,1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (0,5,3,0,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((0,-2,4,2,4), L_1)$ и $M_2((-2,4,3,5,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (-1,2,0,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2,1,-1,2)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 38.

Векторные пространства

1. Постройте изморфизм между в.п. $\mathbb{R}_3[x]$ и $\mathbb{R}^k$.

2. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4,3,3,4,3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3,4,3,5,3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (5,5,5,4,3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4,3,5,3,3). \end{aligned}$$

Найдите размерность и базис пространства, натянутого на векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$.

3. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$\mathbf{e}_1 = (3,3,4)$, $\mathbf{e}_2 = (5,4,4)$, $\mathbf{e}_3 = (4,5,4)$;
$\mathbf{g}_1 = (5,4,3)$, $\mathbf{g}_2 = (4,4,3)$, $\mathbf{g}_3 = (3,5,3)$.

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями последних координат вектора добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

4. Пусть $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ — линейно независимая система векторов. Будет ли независимой система векторов $\mathbf{e}_1 = 5\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_2 = 4\boldsymbol{v}_1 + 5\boldsymbol{v}_2 + 5\boldsymbol{v}_3$, $\mathbf{e}_3 = 3\boldsymbol{v}_1 + 4\boldsymbol{v}_2 + 4\boldsymbol{v}_3$?

5. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^3 - 5x^2 + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^3 + 4x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^3 + 3x - 4 \end{aligned}$$

базис некоторого подпространства $\mathbb{R}_3[x]$?

б) Если векторы v_1, v_2, v_3 не составляют базис, то поменяйте координаты векторов так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^3 + 3x^2 + 4x + 4$ в базисе $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, если $\boldsymbol{v}$ принадлежит пространству $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$.

6. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -2 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

7. Пусть $\boldsymbol{v}_1 = (1,5,-2,1,2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,5,-1,5)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,3,4,4,0)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (5,2,3,-1,-2)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,1,2,4,1)$, $\boldsymbol{w}_3 = (3,0,1,1,4)$. Найти базис суммы $L_1 + L_2$ и пересечения $L_1 \cap L_2$ линейных оболочек $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ и $L_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$.

8. Примем условия предыдущей задачи. Найдите вектор сдвига, размерность и базу направляющего пространства линейного многообразия, являющего пересечением линейных многообразий $M_1((3,1,3,4,4), L_1)$ и $M_2((1,-1,1,-2,2), L_2)$.

9. Пусть $L_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, где $\boldsymbol{v}_1 = (2,5,-2,-2)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,-2,4)$, и L_2 — решение однородной системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Является ли сумма $L_1 + L_2$ — прямой? Другими словами, верно, ли что $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$?

Вариант 1.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 3x - 4$ и $g = 5x + 3$.

4. Даны вершины $A = (3,-2)$, $B = (4,1)$, $C = (5,4)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (2,4,0,4), \quad \boldsymbol{w} = (1,-2,0,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,-2,-1,-2), \mathbf{e}_2 = (0,-1,0,5), \mathbf{e}_3 = (-2,-2,4,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,5,-1,0,1), \mathbf{e}_2 = (2,-1,4,3,-2), \mathbf{e}_3 = (3,0,2,2,0), \mathbf{e}_4 = (2,0,-1,4,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 2.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 5x - 3$ и $g = 4x + 5$.

4. Даны вершины $A = (-2,4)$, $B = (-1,-1)$, $C = (0,2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,1,3,5), \quad \boldsymbol{w} = (1,-2,-2,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,4,2,-1), \mathbf{e}_2 = (0,-1,-1,5), \mathbf{e}_3 = (0,4,1,0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,3,2,1,1), \mathbf{e}_2 = (3,5,3,4,4), \mathbf{e}_3 = (0,-1,-2,4,1), \mathbf{e}_4 = (-2,-1,3,1,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 3.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 3x - 5$ и $g = 3x + 3$.

4. Даны вершины $A = (1,1)$, $B = (2,4)$, $C = (3,0)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (0,-1,-2,-2), \quad \boldsymbol{w} = (1,-1,4,2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2,1,5,-1), \mathbf{e}_2 = (0,0,5,4), \mathbf{e}_3 = (1,3,-1,-1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,0,5,2,2), \mathbf{e}_2 = (3,3,3,-2,3), \mathbf{e}_3 = (-2,-2,1,5,2), \mathbf{e}_4 = (1,5,-2,-2,0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 4.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 5x - 4$ и $g = 5x + 4$.

4. Даны вершины $A = (4,-1)$, $B = (5,2)$, $C = (-2,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (3,4,1,-1), \quad \boldsymbol{w} = (2,-1,2,2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,-1,0,0), \mathbf{e}_2 = (1,0,3,4), \mathbf{e}_3 = (3,1,4,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,-2,0,3,2), \mathbf{e}_2 = (4,1,3,-1,1), \mathbf{e}_3 = (3,5,5,-2,3), \mathbf{e}_4 = (5,4,1,3,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 5.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 5x - 3$ и $g = 4x + 4$.

4. Даны вершины $A = (5,1)$, $B = (0,-2)$, $C = (3,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (2,4,4,3), \quad \boldsymbol{w} = (2,-1,-2,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,2,-1,-1), \mathbf{e}_2 = (1,-1,-1,4), \mathbf{e}_3 = (0,-2,0,5)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,4,-2,3,2), \mathbf{e}_2 = (5,4,-2,5,3), \mathbf{e}_3 = (2,4,4,1,3), \mathbf{e}_4 = (-2,-2,3,0,5)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 6.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 4x - 5$ и $g = 3x + 3$.

4. Даны вершины $A = (-2,1)$, $B = (1,-2)$, $C = (4,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (3,4,3,4), \quad \boldsymbol{w} = (-2,3,-1,5).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,2,5,0), \mathbf{e}_2 = (5,3,1,1), \mathbf{e}_3 = (2,5,5,5)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,5,4,4,-2), \mathbf{e}_2 = (1,5,3,-2,1), \mathbf{e}_3 = (-2,4,-2,3,0), \mathbf{e}_4 = (1,-1,-2,4,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 7.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 4x - 5$ и $g = 5x + 3$.

4. Даны вершины $A = (-1,1)$, $B = (2,-2)$, $C = (5,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (4,5,1,5), \quad \boldsymbol{w} = (1,-1,1,2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2,3,4,1), \mathbf{e}_2 = (0,-1,2,-2), \mathbf{e}_3 = (4,4,1,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,5,3,4,1), \mathbf{e}_2 = (5,-1,0,0,0), \mathbf{e}_3 = (3,4,1,-2,-2), \mathbf{e}_4 = (4,-1,1,0,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 8.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 3x - 4$ и $g = 4x + 5$.

4. Даны вершины $A = (0,2)$, $B = (3,-1)$, $C = (-2,4)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,5,0,5), \quad \boldsymbol{w} = (5,3,2,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,3,2,1), \mathbf{e}_2 = (4,3,3,3), \mathbf{e}_3 = (-2,3,5,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2,5,1,5,5), \mathbf{e}_2 = (1,0,-2,2,-1), \mathbf{e}_3 = (-1,5,4,0,3), \mathbf{e}_4 = (0,0,3,4,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 9.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 3x - 3$ и $g = 5x + 4$.

4. Даны вершины $A = (0,2)$, $B = (5,1)$, $C = (2,-1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (3,2,4,1), \quad \boldsymbol{w} = (4,5,-1,0).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,4,2,-1), \mathbf{e}_2 = (3,4,0,-1), \mathbf{e}_3 = (5,2,3,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,2,0,4,4), \mathbf{e}_2 = (3,3,5,1,3), \mathbf{e}_3 = (0,2,4,0,3), \mathbf{e}_4 = (-2,4,4,2,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 10.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 4x - 3$ и $g = 4x + 5$.

4. Даны вершины $A = (-1,5)$, $B = (4,4)$, $C = (1,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (2,-2,-2,1), \quad \boldsymbol{w} = (3,4,3,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,-1,4,0), \mathbf{e}_2 = (2,4,5,2), \mathbf{e}_3 = (-1,2,-2,5)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,5,2,5,2), \mathbf{e}_2 = (3,0,0,3,2), \mathbf{e}_3 = (3,4,5,4,5), \mathbf{e}_4 = (1,-2,-2,4,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 11.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 5x - 3$ и $g = 3x + 3$.

4. Даны вершины $A = (-2,0)$, $B = (3,-1)$, $C = (0,-2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (1,1,0,2), \quad \boldsymbol{w} = (1,4,0,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,3,-2,0), \mathbf{e}_2 = (0,3,1,5), \mathbf{e}_3 = (1,1,1,-1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,0,4,5,1), \mathbf{e}_2 = (3,4,2,5,1), \mathbf{e}_3 = (-2,-2,-1,0,-1), \mathbf{e}_4 = (4,0,1,-1,-1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 12.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 3x - 3$ и $g = 5x + 4$.

4. Даны вершины $A = (5,3)$, $B = (2,2)$, $C = (-1,1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (0,4,1,2), \quad \boldsymbol{w} = (0,3,4,1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2,-2,0,1), \mathbf{e}_2 = (-2,3,-2,0), \mathbf{e}_3 = (3,0,4,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,4,-2,-2,-1), \mathbf{e}_2 = (2,1,5,0,1), \mathbf{e}_3 = (1,-1,0,3,1), \mathbf{e}_4 = (-1,3,3,1,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 13.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 5x - 5$ и $g = 4x + 5$.

4. Даны вершины $A = (2,1)$, $B = (1,2)$, $C = (0,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (3,0,-1,4), \quad \boldsymbol{w} = (-2,-1,1,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,5,1,5), \mathbf{e}_2 = (5,-2,3,-1), \mathbf{e}_3 = (5,1,4,5)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,-2,-2,4,-2), \mathbf{e}_2 = (-1,4,0,1,-2), \mathbf{e}_3 = (4,3,3,2,0), \mathbf{e}_4 = (3,0,2,0,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 14.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 4x - 3$ и $g = 3x + 4$.

4. Даны вершины $A = (-1,-1)$, $B = (-2,0)$, $C = (5,1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (0,-2,4,5), \quad \boldsymbol{w} = (-1,2,1,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,3,-1,-2), \mathbf{e}_2 = (-2,1,3,-1), \mathbf{e}_3 = (-1,1,-2,0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,4,3,5,-1), \mathbf{e}_2 = (2,4,1,3,-2), \mathbf{e}_3 = (-2,-2,3,-1,-2), \mathbf{e}_4 = (5,5,4,2,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 15.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 3x - 3$ и $g = 5x + 3$.

4. Даны вершины $A = (4,5)$, $B = (3,-2)$, $C = (2,-1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,4,1,5), \quad \boldsymbol{w} = (1,5,1,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,1,4,-2), \mathbf{e}_2 = (0,4,3,0), \mathbf{e}_3 = (2,1,0,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,2,0,5,0), \mathbf{e}_2 = (5,4,1,-2,-2), \mathbf{e}_3 = (0,2,3,3,5), \mathbf{e}_4 = (0,1,-2,3,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 16.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 5x - 4$ и $g = 4x + 5$.

4. Даны вершины $A = (1,3)$, $B = (0,4)$, $C = (-1,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (2,2,-1,5), \quad \boldsymbol{w} = (2,0,1,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,-1,1,-2), \mathbf{e}_2 = (1,-1,3,0), \mathbf{e}_3 = (4,1,2,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,0,5,5,2), \mathbf{e}_2 = (0,4,2,0,-2), \mathbf{e}_3 = (2,5,3,0,4), \mathbf{e}_4 = (2,5,-1,4,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 17.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 5x - 5$ и $g = 5x + 4$.

4. Даны вершины $A = (5,-1)$, $B = (-2,2)$, $C = (-1,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (4,3,5,-1), \quad \boldsymbol{w} = (0,5,-2,1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,4,3,2), \mathbf{e}_2 = (-1,4,1,4), \mathbf{e}_3 = (-1,4,4,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,1,-2,3,-1), \mathbf{e}_2 = (-2,0,1,3,5), \mathbf{e}_3 = (-1,0,0,5,1), \mathbf{e}_4 = (4,5,4,4,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 18.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 5x - 4$ и $g = 4x + 4$.

4. Даны вершины $A = (0,0)$, $B = (1,3)$, $C = (2,-2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-1,4,-2,-1), \quad \boldsymbol{w} = (4,4,1,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,5,4,2), \mathbf{e}_2 = (3,2,4,2), \mathbf{e}_3 = (2,4,5,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,2,-1,3,3), \mathbf{e}_2 = (5,3,-1,-2,5), \mathbf{e}_3 = (0,4,-1,3,5), \mathbf{e}_4 = (-2,3,-2,4,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 19.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 5x - 5$ и $g = 3x + 4$.

4. Даны вершины $A = (3,1)$, $B = (4,4)$, $C = (5,-1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (2,5,-2,-1), \quad \boldsymbol{w} = (1,3,4,5).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,-2,5,3), \mathbf{e}_2 = (-1,1,-1,0), \mathbf{e}_3 = (5,4,5,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,3,0,3,0), \mathbf{e}_2 = (4,-2,5,0,5), \mathbf{e}_3 = (0,1,-2,1,0), \mathbf{e}_4 = (0,1,0,4,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 20.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 5x - 3$ и $g = 5x + 4$.

4. Даны вершины $A = (-2,2)$, $B = (-1,5)$, $C = (0,0)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,-2,-1,-1), \quad \boldsymbol{w} = (5,1,-1,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,-1,-2,3), \mathbf{e}_2 = (4,0,2,-2), \mathbf{e}_3 = (0,4,-2,-1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,4,1,3,4), \mathbf{e}_2 = (2,1,3,3,5), \mathbf{e}_3 = (1,5,5,-1,3), \mathbf{e}_4 = (2,0,1,4,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 21.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 5x - 4$ и $g = 3x + 3$.

4. Даны вершины $A = (0,4)$, $B = (3,1)$, $C = (-2,-2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,-2,-2,0), \quad \boldsymbol{w} = (2,0,5,0).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,2,1,-2), \mathbf{e}_2 = (0,-2,0,5), \mathbf{e}_3 = (4,1,2,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,3,3,0,1), \mathbf{e}_2 = (2,5,-2,0,-1), \mathbf{e}_3 = (0,-1,4,1,0), \mathbf{e}_4 = (2,0,4,5,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 22.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 3x - 3$ и $g = 5x + 4$.

4. Даны вершины $A = (1,0)$, $B = (4,4)$, $C = (-1,1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-2,1,3,0), \quad \boldsymbol{w} = (1,2,3,4).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,-2,5,-2), \mathbf{e}_2 = (0,0,-1,1), \mathbf{e}_3 = (-1,2,1,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2,-2,-1,0,0), \mathbf{e}_2 = (5,4,2,3,-1), \mathbf{e}_3 = (0,5,2,0,0), \mathbf{e}_4 = (4,1,5,4,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 23.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 5x - 5$ и $g = 4x + 3$.

4. Даны вершины $A = (2,3)$, $B = (5,0)$, $C = (0,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-1,5,-1,-1), \quad \boldsymbol{w} = (1,5,2,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,2,1,-2), \mathbf{e}_2 = (-1,3,5,4), \mathbf{e}_3 = (3,2,1,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,2,3,0,-1), \mathbf{e}_2 = (-1,2,5,-2,0), \mathbf{e}_3 = (-1,2,-1,-1,0), \mathbf{e}_4 = (5,1,-2,2,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 24.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 3x - 4$ и $g = 3x + 4$.

4. Даны вершины $A = (3,-1)$, $B = (-2,4)$, $C = (1,1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (0,1,3,-1), \quad \boldsymbol{w} = (0,-1,0,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,-2,5,5), \mathbf{e}_2 = (-1,5,3,0), \mathbf{e}_3 = (-2,3,0,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,-2,-1,0,-1), \mathbf{e}_2 = (1,1,1,1,1), \mathbf{e}_3 = (-2,0,5,-1,0), \mathbf{e}_4 = (-1,1,0,1,-1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 25.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 5x - 5$ и $g = 5x + 3$.

4. Даны вершины $A = (2,-1)$, $B = (-1,-2)$, $C = (4,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,-2,3,-1), \quad \boldsymbol{w} = (3,0,-2,4).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,-1,2,0), \mathbf{e}_2 = (2,5,2,3), \mathbf{e}_3 = (4,2,-2,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,3,2,3,2), \mathbf{e}_2 = (3,5,0,0,4), \mathbf{e}_3 = (0,1,-2,-1,4), \mathbf{e}_4 = (5,4,1,4,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 26.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 5x - 5$ и $g = 3x + 5$.

4. Даны вершины $A = (2,-2)$, $B = (-1,4)$, $C = (4,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,5,3,-1), \quad \boldsymbol{w} = (-2,5,0,5).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,-2,2,-1), \mathbf{e}_2 = (4,3,3,5), \mathbf{e}_3 = (0,3,5,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,1,2,3,5), \mathbf{e}_2 = (1,-1,1,3,5), \mathbf{e}_3 = (-2,0,3,-1,1), \mathbf{e}_4 = (-2,-2,2,1,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 27.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 4x - 4$ и $g = 5x + 5$.

4. Даны вершины $A = (1,4)$, $B = (-2,3)$, $C = (3,2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (4,4,2,-2), \quad \boldsymbol{w} = (0,3,2,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,4,1,-1), \mathbf{e}_2 = (-1,1,5,-2), \mathbf{e}_3 = (3,4,3,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,0,1,3,-1), \mathbf{e}_2 = (-1,0,2,-1,-2), \mathbf{e}_3 = (4,-1,-1,0,5), \mathbf{e}_4 = (-1,0,3,-2,5)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 28.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0;1]$ скалярное произведение задано формулой $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 3x^2 + 4x - 4$ и $g = 4x + 4$.

4. Даны вершины $A = (0,3)$, $B = (5,1)$, $C = (2,0)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (3,2,2,-2), \quad \boldsymbol{w} = (3,1,3,0).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,3,1,-1), \mathbf{e}_2 = (1,-2,-1,-1), \mathbf{e}_3 = (-1,5,1,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,-2,1,2,1), \mathbf{e}_2 = (4,2,3,2,-1), \mathbf{e}_3 = (2,-2,4,0,2), \mathbf{e}_4 = (0,2,3,3,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 29.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5, 5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3, 3, 5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0; 1]$ скалярное произведение задано формулой $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 3x - 5$ и $g = 3x + 5$.

4. Даны вершины $A = (5, 1)$, $B = (4, 2)$, $C = (3, 2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-2, -2, 4, 5), \quad \boldsymbol{w} = (5, 4, 1, 5).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0, 2, -2, 0), \mathbf{e}_2 = (4, 0, -2, -2), \mathbf{e}_3 = (-1, -2, 1, 0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2, 1, 5, 5, 4), \mathbf{e}_2 = (0, -1, -2, 2, 5), \mathbf{e}_3 = (5, -2, -1, -2, 5), \mathbf{e}_4 = (4, -2, 3, -1, 5)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 30.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4, 5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5, 5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5, 3, 5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4, 5, 5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0; 1]$ скалярное произведение задано формулой $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 4x - 5$ и $g = 5x + 3$.

4. Даны вершины $A = (2, 2)$, $B = (1, 3)$, $C = (1, 4)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (4, -1, -1, 4), \quad \boldsymbol{w} = (3, 5, -2, 3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2, 3, 1, -1), \mathbf{e}_2 = (1, 2, 2, 5), \mathbf{e}_3 = (3, -1, -2, 1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4, 2, 0, 5, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 4, 5, -2, -2), \mathbf{e}_3 = (2, -2, 2, 0, -2), \mathbf{e}_4 = (4, 3, 3, 3, 0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 31.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5, 4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3, 3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3, 5, 5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0; 1]$ скалярное произведение задано формулой $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 5x^2 + 5x - 4$ и $g = 3x + 5$.

4. Даны вершины $A = (5, -2)$, $B = (4, -1)$, $C = (3, -1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-2, 3, -1, 5), \quad \boldsymbol{w} = (-1, 5, 5, -1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0, -1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (-2, 1, 1, 1), \mathbf{e}_3 = (3, 4, 1, 0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2, -2, 0, -2, -2), \mathbf{e}_2 = (1, 3, 1, -2, 2), \mathbf{e}_3 = (5, -2, 2, 1, -1), \mathbf{e}_4 = (1, 1, 4, 4, -1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Вариант 32.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4, 5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5, 4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5, 3, 5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4, 4, 5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. В $C^0[0; 1]$ скалярное произведение задано формулой $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Найти длины (нормы) и косинус угла между векторами $f = 4x^2 + 3x - 4$ и $g = 5x + 5$.

4. Даны вершины $A = (2, -1)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (3, 4, 2, 5), \quad \boldsymbol{w} = (5, -2, 2, -2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5, 0, 4, 0), \mathbf{e}_2 = (3, 3, -2, -1), \mathbf{e}_3 = (-1, 5, -2, 0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

7. В $\mathbb{E}^5$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3, -1, 3, 5, 3), \mathbf{e}_2 = (2, 0, 0, 2, 4), \mathbf{e}_3 = (2, -2, -2, 2, 0), \mathbf{e}_4 = (2, 5, 5, 0, 1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ — базис в $\mathbb{E}^5$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.