ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Якутский государственный университет им. М.К.Аммосова

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ ЯГУ

кафедра алгебры и геометрии

Учебно-методический комплекс дисциплины «ТОПОЛОГИЯ»

специальность 010101 «Математика»

направление 010100 «Математика»

Якутск, 2009

Шамаев Э.И.

Выписка из рабочей программы курса «ТОПОЛОГИЯ»

Якутск, 2009

Опубликовано на сайте http://yktmath.narod.ru

Календарно-тематический план с отражением СРС на 2011 год

дата неделя Тема занятия

09.02 1 Введение в предмет. Непрерывность на числовой оси. Гомеоморфизмы. Лекция, 2 ч

16.02 2 Гомеморфизмы. Практическое занятие, 2 ч

23.02 3 Метрические и топологические пространства Лекция, 2 ч

02.03 4 Доказательства не гомеоморфности Практические занятия, 2 ч

09.03 5 Доказательства не гомеоморфности. Топологические препятствия Лекция, 2 ч

16.03 6 Доказательства не гомеоморфности. Топологические препятствия Лекция, 2 ч

Геомоморфизмы СРС, 2 ч

23.03 7 Геомоморфизмы и не гомеоморфные пространства Практические занятия, 2 ч

30.23 8 Гладкие многообразия Лекция, 2 ч

06.04 9 Гладкие многообразия Практические занятия, 2 ч

13.04 10 Римановы многообразия Лекция, 2 ч

20.04 11 Римановы многообразия Практические занятия, 2 ч

27.04 12 Касательный вектор. Тензоры Лекция, 2 ч

04.05 13 Касательный вектор. Тензоры Практические занятия, 2 ч

Тензоры на гладких многообразиях СРС, 4 ч

11.05 14 Кососимметрические тензоры, дифференциальные формы Практические занятия, 2 ч

Гомотопия СРС, 8 ч

18.05 15 Интегрирование на гладких многообразиях Лекция, 2 ч

25.05 16 Интегрирование на гладких многообразиях СРС, 6 ч

01.06 17 Интеграл дифференциальной формы Лекция, 2 ч

Перечень методических разработок по СРС

1. Конспект лекций, электронная книга, опубликована на yktmath.narod.ru/ysu

2. Задачи по Топологии для СРС, электронная книга, опубликована на yktmath.narod.ru/ysu

График консультаций

Каждый четверг, после 14.00 на кафедре.

Консультации проводятся по темам:

Геомоморфизмы СРС, 2 ч

Тензоры на гладких многообразиях СРС, 4 ч

Гомотопия СРС, 8 ч

Интегрирование на гладких многообразиях СРС, 6 ч

Анализ равномерности

СРС распределены равномерно

Анализ соответствия

Часы СРС соответствуют часам рабочей программы

Шамаев Э.И.

Конспект лекций по курсу «ТОПОЛОГИЯ»

Якутск, 2009

Опубликовано на сайте http://yktmath.narod.ru

Содержание

Непрерывность функций **11**

Что такое топология? **16**

Метрические пространства **18**

Метрические подпространства 21

Открытые множества 22

Топологические пространства **25**

Гомеоморфизмы **27**

Примеры гомеоморфизмов **29**

Топологические свойства гомеоморфизмов **31**

Фундаментальная группа топологических пространств **33**

Гладкие многообразия **35**

Касательный вектор **36**

Тензоры **40**

Римановы многообразия **42**

Дифференциальные формы и их интегрирование **42**

Непрерывность функций

В курсе математического анализа непрерывность функции в точке была определена следующим образом:

Определение 1. *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *такое, что для всех* x *таких, что* $|x - x_0| < \delta$ *справедливо неравенство* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, *то функция* $f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0.

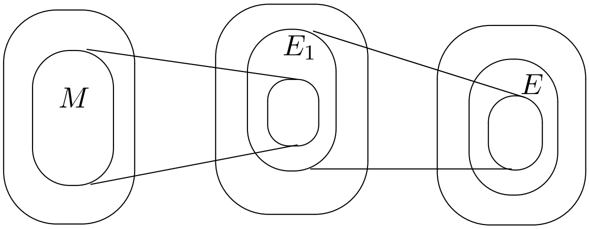
Интервал вида $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ называется δ-окрестностью точки x_0. Неравенство $|x - x_0| < \delta$ означает $-\delta < x - x_0 < \delta$. Полученная пара неравенств равносильна системе $\begin{cases} x_0 - \delta < x; \\ x < x_0 + \delta. \end{cases}$ Последнее означает, что $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Перепишем определение 1, используя δ и ε-окрестности: *если для любой* ε*-окрестности точки* $f(x_0)$ *существует* δ*-окрестность точки* x_0, *такая что для всех* x *из* δ*-окрестности* x_0 *значение функции* $f(x)$ *принадлежит* ε*-окрестности точки* $f(x_0)$, *то* f *называется непрерывной в точке* x_0.

Пусть M — некоторое подмножество области определения f, тогда множество значений f на M обозначается через $f(M)$.

$$f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}.$$

Дадим определение непрерывности функции, которым мы будем пользоваться в течении курса.



Определение 2. *Если для любой открытой окрестности E точки $f(x_0)$ существует окрестность M точки x_0, такая что $f(M) \subset E$, то говорят, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.*

Самостоятельно докажите следующее утверждение.

Лемма 1. *Данные выше определения непрерывности функций эквивалентны.*

Докажем несколько утверждений о непрерывности функций, используя определение 2.

Лемма 2. *Если $f : X \to Y$ непрерывна в точке x_0 и и $g : Y \to Z$ непрерывно в точке $f(x_0)$, то $g(f(x))$ является непрерывной функцией в точке x_0.*

Доказательство. Напишем условия непрерывности:

1) для любой окрестности E точки $g(f(x_0))$ существует окрестность M_1 точки $f(x_0)$ такая, что $g(M_1) \subset E$.

2) для любой окрестности E_1 точки $f(x_0)$ существует окрестность M точки x_0 такая, что $f(M) \subset E_1$.

Будем считать, что $E_1 = M_1$. Тогда для любой окрестности E точки $g(f(x_0))$ существует окрестность $E_1 = M_1$ точки $f(x_0)$ такая, что $g(M_1) = g(E_1) \subset E$. Кроме этого, существует окрестность M точки x_0 такая, что $f(M) \subset E_1$, следовательно, $g(f(M)) \subset g(E_1) \subset E$.

Таким образом, для любой окрестности E точки $g(f(x_0))$ существует окрестность M точки x_0 такая, что $f(M) \subset E$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, то $f(x) + g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ являются непрерывными в точке x_0.*

Доказательство. Пусть $E = (f(x_0)+g(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+g(x_0)+\varepsilon)$ произвольная открытая окрестность $f(x_0)+g(x_0)$. Пусть $E_1 = (f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2})$ и $E_2(g(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, g(x_0) + \frac{\varepsilon}{2})$. Тогда сумма $a + b$ любых чисел $a \in E_1$ и $b \in E_2$ принадлежит E.

Из непрерывности f и g следует, что существуют окрестность M_1 точки $f(x_0)$ такая, что $f(M_1) \subset E_1$, и окрестность M_2 точки $g(x_0)$ такая, что $g(M_2) \subset E_2$.

Теперь рассмотрим $M = M_1 \cap M_2$. Ясно, что $f(M_1 \cap M_2) \subset E_1$ и $g(M_1 \cap M_2) \subset E_2$. Тогда в силу выбора E_1 и E_2 имеет место включение $f(M_1 \cap M_2) + g(M_1 \cap M_2) \subset E$.

Для произвольного E мы построили (тем самым показали существование) $M = M_1 \cap M_2$ такого, что $(f+g)(M) \subset E$. Лемма доказана.

Определение 3. *Пусть X и Y — множества в которых* *определены окрестности. Функцию $f : X \to Y$ непрерывную в каждой точке из X называют непрерывной на X.*

Определение 4. *Если функция $f : X \to Y$ обладает следующими тремя свойствами*

1) всюду определена (для любого $x \in X$ существует $f(x)$);

2) является отображением "на" (для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой, что $y = f(x)$);

3) взаимно однозначно (если $f(x) = f(x')$, то $x = x'$), то f называется биекцией.

Биекция всегда имеет обратную функцию.

Определение 5. *Если существуют функции $f : X \to Y$ и $f^{-1} : Y \to X$, и обе эти функции непрерывны, то f и f^{-1} называются гомеоморфизмами.*

Определение 6. *Непрерывная биекция называется гомеоморфизмом.*

Замечание. Если f — гомеоморфизм, то f^{-1} — также гомеоморфизм.

Приведем наиболее мощное утверждение, с помощью которого можно построить многие гомеоморфизмы между числовыми множествами.

Лемма 4. *Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго монотонна и непрерывна, то f — гомеоморфизм.*

1. Докажите, что любой многочлен является непрерывной функцией.

2. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ является непрерывной.

3. Если биекция отображает множество с n элементами на множество A, то сколько элементов может быть у A?

5. Может ли четная функция с областью определения $[-1;1]$ быть биекцией?

6. Может ли нечетная функция с областью определения $[-1;1]$ быть биекцией? Если да, то приведите пример.

7. Приведите пример биекции (необязательно непрерывной), которая не является монотонной функцией.

8. Постройте гомеоморфизм между $[0,1]$ и $[a,b]$, где $a < b$ некоторые числа. Найдите обратную функцию построенного гомеоморфизма.

9. Постройте гомеоморфизм между $[a,b]$ и $[c,d]$.

10. Постройте гомеоморфизм между (a,b) и (c,d).

11. Постройте гомеоморфизм между $(1,0)$ и $(1,+\infty)$.

12. Постройте гомеоморфизм между $(1,+\infty)$ и $(0,+\infty)$.

13. Постройте гомеоморфизм между (a,b) и $(0,+\infty)$.

14. Докажите, используя монотонность и непрерывность e^x, что e^x — гомеоморфизм между $(0,1)$ и $(1,e)$.

15. Докажите, что $\frac{1+x}{x}$ — гомеоморфизм между $(1,+\infty)$ и $(2,+\infty)$.

16. Докажите, что $(0,1)\cup(2,3)$ и $(0,2)$ не гомеоморфны.

16. Докажите, что $(0,1)$ и $[0,1]$ не гомеоморфны.

17*. Докажите, что не существует гомеоморфизма между объединением n непресекающихся интервалов и объединением m непресекающихся интервалов, если $m \neq n$.

Определение 7. *Функцию* $g(f(x))$ *обозначают* $(g \circ f)(x)$ *и называют суперпозицией функций* f *и* g.

Что такое топология?

Топология — это раздел математики, где исследуются глобальные свойства гладких поверхностей и их обобщений — гладких многообразий.

Следующее утверждение очевидно с точки зрения здравого смысла: **Непрерывная кривая на плоскости, соединяющая точки по разные стороны оси абсцисс, хотя бы один раз пересекает ось абцисс.** Для формального доказательства этого утверждения, носящего топологический характер, не является тривиальным.

Покажем с помощью этого утверждения следующее: Многочлены вида $P(x) = x^3 + a^2x + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ имеют хотя бы один вещественный корень.

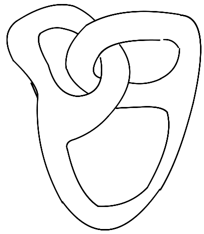
При $x > 3\max\{|a|, |b|, |c|\}$ многочлен $P(x)$

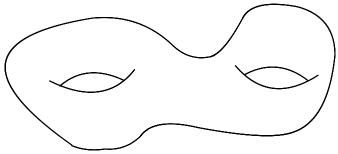
$$P(x) = x^3(1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}).$$

$$|\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3}|$$

Решите задачи.

Решите задачи.





Упражнения на закрепление

1. Докажите гомеоморфность следующих поверхностей.

Метрические пространства

В школьном курсе математики вводится понятие числовой оси $\mathbb{R}$. Также учащиеся изучают понятие плоскости и пространства. Позже на первых курсах высших учебных изучается обобщение числовой оси векторные пространства $\mathbb{R}^n$. Дальнейшим развитием этого понятия является метрическое пространство. Сфера S^2, тор T^2, множество $(n \times n)$-матриц с единичным определителем $SL(n)$, ломаные — примеры метрических пространств.

Определение 8. *Множество M с функцией $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ со свойствами*

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
2. $\rho(x, x) = 0$; *если* $x \neq y$, *то* $\rho(x, y) > 0$;
3. *неравенство треугольника*

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z),$$

которые выполнены для всех $x, y, z \in M$, называется метрическим пространством. Функция ρ называется метрикой.

Такие пространства будем обозначать через (M, ρ). Свойства 1, 2, 3 называются аксиомами метрического пространства. Приведем примеры метрических пространство.

Лемма 5. *Числовая ось с метрикой*

$$\rho(x, y) = |x - y|, \text{ где } x, y \in \mathbb{R}$$

является метрическим пространством.

Доказательство. Ясно, что $|x-y| = |-(y-x)| = |y-x|$ и $|x-y| \geqslant 0$. Кроме этого $|x-y| = 0$ только в случае $x = y$. Следовательно, первые две аксиомы выполнены.

Докажем третью аксиому. Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то неравенство $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$ эквивалентно неравенству $(x-z)^2 \leqslant (|x-y|+|y-z|)^2$, далее раскрывая скобки, приходим к эквивалентному, но очевидному, неравенству $0 \leqslant 2|x-z| \cdot |y-z|$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Рассмотрим фунцию ρ на плоскости $\mathbb{R}^2$*

$$\rho(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2},$$

где $A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b) \in \mathbb{R}^2$.

$(\mathbb{R}, \rho)$ является евклидовым метрическим пространством.

Доказательство. Первые две аксиомы очевидны.

Докажем третью аксиому. В данном случае это неравенство $\rho(X,Z) \geqslant \rho(X,Y) + \rho(Y,Z)$. называется неравенством треугольника. Напомним, что $|v|^2 = (v,v)$, линейность скалярного произведения и неравенство Коши-Буняковского $(v,u) \leqslant |v| \cdot |u|$ для любых векторов $v, u \in \mathbb{R}^2$.

Пусть $v = \overrightarrow{XY}$ и $u = \overrightarrow{YZ}$. Тогда $\overrightarrow{XY} = v - u$ и неравенство треугольника можно переписать в виде $|v-u| \leqslant |v| + |u|$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $|v-u|^2 \leqslant (|v|+|u|)^2$. Что означает $|v|^2 - 2(v,u) + |u|^2 \leqslant |v|^2 + 2|v| \cdot |u| + |u|^2$. Последнее неравенство следует из неравенства Коши-Буняковского.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Множество векторов евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$ *с метрикой*

$$\rho(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\},$$

где $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *является метрическим пространством.*

Доказательство. Первая и вторая аксиомы очевидны. Докажем третью аксиому. Для каждого $k = 1, \dots, n$ справедливо неравенство треугольника

$$|x_k - z_k| \leqslant |x_k - y_k| + |y_k - z_k|.$$

Тогда, тем более,

$$|x_k - z_k| \leqslant \max_i |x_i - y_i| + \max_j |y_j - z_j|.$$

Правое выражение в неравенстве равно $\rho(x,y)+\rho(y,z)$. Левое выражение для некоторого $k = 1, \dots, n$ равно $\rho(x,z)$. Таким образом, неравенство аксиомы 3 доказано. Лемма доказана.

Лемма 8. *Множество всех непрерывных функций на отрезке* $[a;b]$, *обозначаемое* $C[a;b]$, *с метрикой*

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)| \text{ где } f(x), g(x) \in C[a;b]$$

является метрическим пространством.

Доказательство. Первая и вторая аксиомы очевидны. Докажем третью аксиому. Для каждого $x \in [a;b]$ справедливо неравенство треугольника

$$|f(x) - h(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|.$$

Тогда, тем более,

$$|f(x) - h(x)| \leqslant \sup_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[a;b]} |g(x) - h(x)|.$$

Правое выражение в неравенстве равно $\rho(f,g)+\rho(g,h)$. Переходя к пределу в неравенстве получаем справедливость неравенства $\rho(g,h) \leqslant \rho(f,g) + \rho(g,h)$.

Таким образом, неравенство аксиомы 3 доказано. Лемма доказана.

Метрические подпространства

Пусть $(M, \rho(x,y))$ — метрическое пространство и $N \subset M$. Тогда для любых $x, y \in N$ можно «подсчитать» $\rho(x,y)$ и эта функция имеет все свойства метрики. Поэтому $(N, \rho(x,y))$ также является метрическим пространством.

Определение 9. *Пусть $(M, \rho(x,y))$ — метрическое пространство и $N \subset M$. Тогда $(N, \rho(x,y))$ называется метрическим подпространством $(M, \rho(x,y))$ с индуцированной метрикой.*

Приведем примеры метрических пространств с индуцированной метрикой.

1) Сфера $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

2) Шар $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

2) Заполненный куб $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leqslant x, y, z \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

Более того любое подмножество $\mathbb{R}^n$ является метрическим пространством с метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^n$.

Открытые множества

Определение 10. *Пусть $(M, \rho(x, y))$ — метрическое пространство тогда*

$$B(x, r) = \{y \in M \mid \rho(x, y) < r\}$$

называется открытым шаром радиуса r с центром в точке x.

Подмножество $A \subset M$ называется открытым, если содержит каждую свою точку x вместе с некоторым открытым шаром $B(x, r)$.

Докажем леммы, которые будут полезны в следующем параграфе.

Лемма 9. *Рассмотрим метрическое пространство $(M, \rho(x, y))$. Пустое множество является открытым. Множество M является открытым множеством.*

Лемма 10. *Рассмотрим метрическое пространство $(M, \rho(x, y))$. Объединение любого числа открытых множеств является открытым.*

Лемма 11. *Рассмотрим метрическое пространство* $(M, \rho(x,y))$. *Пересечение конечного числа открытых множеств является открытым.*

Упражнения на закрепление

1. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\rho_E(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ является метрическим пространством.

2. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\rho_0(X,Y) = \dfrac{\rho_E(x,y)}{1+\rho_E(x,y)}$ является метрическим пространством.

3. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\rho_1(X,Y) = \rho_E(X,Y)^2$ является метрическим пространством.

4. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с метрикой $\rho_2(X,Y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$ является метрическим пространством.

5. Что такое обобщение некоторого понятия? Где здесь обобщение: легковая машина, жигули, транспортное средство?

6. Как шло обобщение натуральных чисел? рациональные числа, целые числа, действительные числа, натуральные числа?

7. Приведите примеры других обобщений в математике.

8. Докажите, что треугольник на $\mathbb{R}^2$ с индуцированной метрикой является метрическим пространством.

9. Докажите, что эллипсоид в $\mathbb{R}^3$ является метрическим пространством.

10. Существует ли подмножество $\mathbb{R}^n$ не являющееся метрическим подпространством $\mathbb{R}^n$?

Иногда вместо «индуцированная метрика» говорят «внешней метрикой».

Топологические пространства

Определение 11. *Рассмотрим произвольное множество T. Пусть система τ подмножеств множества T обладает свойствами*

1) всегда $T \in \tau$ и $\varnothing \in \tau$;

2) объединение любого счетного или конечного числа элементов τ найдется в τ;

3) пересечение любого конечного числа элементов τ найдется в τ.

Тогда (T, τ) называется топологическим пространством, τ — топологией, а элементы τ — открытыми множествами.

Множество $B \subset T$ называется замкнутым, если $T \backslash B$ — открытое множество.

Примеры топологических пространств.

1. Пусть $T = \mathbb{R}^n$. Это множество является метрическим пространством, следовательно, в $\mathbb{R}^n$ определены открытые множества в смысле метрического пространства. Будем считать, что все открытые множества в смысле метрического пространства (т.е. содержащие все свои точки вместе с некоторыми шарами) открытыми. Тогда по леммам 10 и 11 свойства 2) и 3) топологического пространства выполнены. Очевидно, что свойство 1) выполнено. Эту топологию называют естественной топологией.

Топологическое пространство является обобщением понятия метрического пространства. Покажем, это.

Теорема 1. *Если* (M, ρ) *— метрическое пространство. Вспомним определение открытых шаров в метрическом пространстве*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in M \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$$

и определение открытого множества в смысле метрического пространства.

Тогда система τ *всех открытых множеств в смысле метрического пространства вместе с множеством* M *является топологическим пространством* (M, τ).

Такие топологии называют порожденными или индуцированными метрикой, в данном случае, ρ.

Таким образом, каждое метрическое пространство — топологическое пространство. Возникает вопрос «неправильный» с точки зрения математика: зачем обобщать понятие метрического пространства?

Теперь рассмотрим обратную задачу, называемую метризацией: пусть дано некоторое топологическое пространство (T, τ). Существует ли для этого пространства метрика ρ такая, что τ индуцируется метрикой τ?

Оказывается, для достаточно обширного класса (T, τ) это возможно.

Теорема 2 (о метризации, Урысон)**.** *Топологическое пространство со счетной базой метризуемо тогда и только тогда, когда оно нормально и хаусдорфово.*

Для топологических пространств, не имеющих счетную базу, нет критерия метризуемости, но существуют множество теорем о достаточных условиях метризуемости.

Дадим определение базы, нормальности и хаусдорфовости топологического пространства.

Определение 12. *Пусть* (T, τ) *— топологическое пространство.*

Систему открытых множеств $\Im \subset \tau$ *называют базой, если каждое открытое множество* τ *можно представить в виде счетного или конечного объединения элементов* $\Im$.

Если для любых $a, b \in T$ *существуют непересекающиеся, содержащие их, открытые множества, то говорят, что выполнена аксиома Хаусдорфа, а топологическое пространство* (T, τ) *— хаусдорфово.*

Если для любых замкнутых множеств $A, B \subset T$ *существуют непересекающиеся, содержащие их, открытые множества, то говорят, что топологическое пространство* (T, τ) *— нормально.*

Для изучения проблемы метризуемости подробнее можно см. [1],[2].

Гомеоморфизмы

Определение 13. *Отображением из множества* M *в множество* N *называется некоторое правило по кото-*

рому некоторым элементам M сопоставляется элемент N.

Более строгое определение звучит так: Отображением из множества M в множество N называется подмножество $f \subset M \times N$ такое, что если $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f$, то $y = z$.

Отображение x в y принято обозначать через $f(x) = y$. Слова «отображение из M в N» сокращенно пишут «$f : M \to N$».

Далее дадим общее определение для непрерывных отображений метрических и топологических пространств.

Определение 14. *Если для любой открытой окрестности E точки $f(x_0)$ существует окрестность M точки x_0, такая что $f(M) \subset E$.*

то говорят, что отображение $f(x)$ непрерывно в точке x_0.

Определение 15. *Отображение $f : X \to Y$ непрерывное в каждой точке X называют непрерывной отображением на X.*

Определение 16. *Если существуют отображения $f : X \to Y$ и $f^{-1} : Y \to X$, и обе эти отображения непрерывны, то f и f^{-1} называются гомеоморфизмами.*

Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ и $W \subset \mathbb{R}^m$. Точке $x \in V$ можно сопоставить ее координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точка $f(x)$ также имеет координаты $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Каждая из $f_1, f_2, \ldots, f_m$

зависит от x и, следовательно, является функцией многих переменных от $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Таким образом, отображение $f : V \to W$ задает функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Обратное утверждение также верно: функции задают отображение.

Подчеркнем, что эти утверждения верны только в случае отображения подмножеств $\mathbb{R}^n$.

Справедлива следующая теорема из математического анализа.

Теорема 3. *Пусть $V \subset \mathbb{R}^n$ и $W \subset \mathbb{R}^m$. Тогда отображение $f : V \to W$ непрерывно если и только если непрерывны $f_1, \ldots f_m$.*

Примеры гомеоморфизмов

Лемма 12. $: \mathbb{S}^2 \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^2$, *где*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2\} \subset \mathbb{R}^3, \quad P = (0, 0, 1)$$

и

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_2}, \frac{x_1}{1 - x_3}\right)$$

Отображение σ является гомеоморфизмом между сферой с выколотой точкой P и плоскостью.

Лемма 13. *Отображение $\rho : \Omega \to \mathbb{S}^2$, где*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

и

$$\rho(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}},\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}},\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)$$

является гомеоморфизмом между сферой и поверхностью куба Ω с центром в начале координат.

Из предыдущих лемм следует, что $\sigma\circ f\circ\rho$, где f — гомотетия пространства с коэффициентом 2 и сдвиг по вектору $(0,0,-1)$, отображает выколотый куб на плоскость.

Упражнения на закрепление

1. Как с помощью понятия открытой окрестности определить понятие близости для трех точек? Что ближе к точке A точка B или C?

2. Зачем обобщать понятие метрического пространства?

3. Постройте гомеоморфизм между эллипсом и окружностью.

4. Постройте гомеоморфизм между квадратом и окружностью.

5. Постройте гомеоморфизм между эллиптическим параболоидом и плоскостью.

6. Постройте гомеоморфизм между эллипсоидом и сферой.

7. Постройте гомеоморфизм между эллипсоидом и кубом.

Топологические свойства гомеоморфизмов

Утверждения о том, что некоторые пространства не являются гомеоморфными доказываются куда более сложнее чем конструкции гомеоморфизмов. Для решения задач о не гомеоморфности привлекаются геометрические свойства пространств.

Определение 17. *Множество $N \subset M$ метрического пространства называется компактным, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset N$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, кроме этого $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in N$.*

Приведем эквивалентное определение компактности, в которой не используется понятие предела.

Определение 18. *Множество $N \subset M$ метрического пространства называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Компактное хаусдорфово топологическое пространство называется компактом.

Замкнутым называется множество, дополнение которого является открытым. Напомним теорему из математического анализа

Теорема 4 (Критерий компактности)**.** *Множество $N \subset \mathbb{R}^n$ компактно, если и только если N — ограничено и замкнуто.*

Примеры: куб, сфера, эллипсоид, окружность, отрезок $[a, b]$ — компактны.

С другой стороны, сфера с выколотой точкой, открытый шар, интервал $(a; b)$ — не являются компактными.

Теорема 5 (Сохранение компактности)**.** *Если M компактно и гомеоморфно N, то N также компактно.*

Используя эту теорему легко показать, что, например, сфера с выколотой точкой не гомеоморфно поверхности куба.

Теперь важно уметь определять замкнутость произвольного множества.

Лемма 14. *В метрическом пространстве $\mathbb{R}$ отрезок $[0, 1]$ является замкнутым множеством.*

Лемма 15. *В метрическом пространстве $\mathbb{R}$ отрезок $[a, b]$ является замкнутым множеством.*

Лемма 16. *В метрическом пространстве $\mathbb{R}$ промежутки $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) не являются замкнутыми множествами.*

Лемма 17. *Декартово произведение замкнутых множеств замкнуто. пересечение любого числа замкнутых замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Лемма 18. *Образ замкнутого множества при непрерывном отображении замкнуто.*

Отсюда следует следующая лемма

Лемма 19. *Образ компактного множества при непрерывном отображении компактно.*

____________________ Упражнения на закрепление

1. Докажите, что квадрат на плоскости является замкнутым множеством.

2. Докажите, что окружность на плоскости является замкнутым множеством.

3. Докажите, что эллипсоид в пространстве $\mathbb{R}^3$ является замкнутым множеством.

4. Докажите, что окружность с выколотой точкой не является замкнутым множеством.

5. Докажите, что парабола является замкнутым множеством.

6. Докажите, что окружность, квадрат, сфера, поверхность куба являются компактными.

7. Докажите, что парабола не является компактным.

8. Докажите, что точка является компактным.

9. Какие кривые второго порядка являются компактными?

Фундаментальная группа топологических пространств

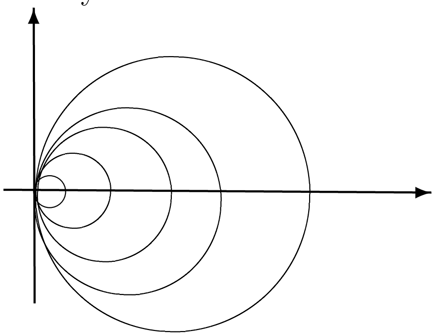
Определение 19. *Путем (или кривой) в топологическом пространстве T называется всякое непрерывное отобра-*

жение $\gamma : [a,b] \to T$. *Если* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *то этот путь называется замкнутым.*

Если существует непрерывное отображение $F : [a,b]\times [0;1] \to T$ *такое, что* $F(\,\cdot\,,0) = \gamma_1$ *и* $F(\,\cdot\,,1) = \gamma_2$, *то пути* γ_1 *и* γ_2 *называются гомотопически эквивалентными. Обозначается через* $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Гомотопическая эквивалентность γ_1 и γ_2. означает, что путь γ_1 можно продеформировать в путь γ_2.

Гомотопическая эквивалентность пути $\gamma_1(t) = (1-\cos t, \sin t)$, пробегающей окружность, и точки $\gamma_2(2) = (0,0)$ на плоскости интуитивно понятна:



доказывается с помощью .

Гладкие многообразия

Определение 20. *Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой M такое, что каждая точка $x \in M$ имеет открытую окрестность U, гомеоморфную области W из $\mathbb{R}^n$, называется топологическим многообразием размерности n.*

Гомеоморфизмы φ_i между U_i и $W_i \subset \mathbb{R}^n$ называются картами.

Каждая карта φ_i задает в U_i локальные координаты, т.е. каждая точка U_i имеет некоторые координаты.

Если система карт $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ покрывает все многообразие, то эту систему карт называют атласом.

Определение 21. *Топологическим многообразием размерности n называется гладким многообразием размерности n, если для любых карт $\varphi : U \to R^n$ и $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, либо $U \cap V = \varnothing$, либо $\psi(\varphi^{-1}(x))$ является гладким отображением.*

Напомним, что функция, у которой существует производная любого порядка, называется гладкой; а отображение $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ подмножеств $\mathbb{R}^n$ называется гладким, если гладким является каждая из функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Примерами гладких многообразий являются практически все топологические пространства, которые мы рассматривали: интервалы, окружность, квадрат и треугольник, сфера, эллипсоид, поверхность куба, куб и т.д.

Докажем следующую лемму:

Лемма 20. *Окружность* $\mathbb{S}^2$ *является гладким многообразием.*

Лемма 21. *Квадрат является гладким многообразием.*

Отрезок $[0;1]$ и кривая, похожая на цифру восемь, не являются гладкими многообразиями.

Упражнения на закрепление

1. Если функции $\gamma = \psi \circ \gamma_1$. Может ли иметь место равенство $\gamma_1 = \gamma \circ \psi^{-1}$?

Касательный вектор

Пусть на гладком многообразии M задана гладкая кривая $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, проходящая через точку $x_0 \in M$ и карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ содержит точку x_0.

Пусть карта φ задает локальные координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Тогда отображение $\varphi(\gamma(t))$ задает некоторую кривую в пространстве $\mathbb{R}^n$ координат. Принято обозначать эту кривую через $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.

В таких координатах вектор скорости

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots, \dot{x}_n(t)).$$

С другой стороны, гладкая кривая $\gamma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, может лежать на другой карте $\psi : V \to \mathbb{R}^n$. Пусть карта ψ задает координаты $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

В таких координатах вектор скорости примет вид

$$\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t), \ldots, \dot{y}_n(t)).$$

Эти векторы скорости связаны соотношением

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \dot{y}_i$$

На основе этой функции вводится определение

Определение 22. *Касательным вектором к многообразию M в точке x_0 называется вектор, записываемый в системе локальных координат $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ набором чисел $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$, а в другой системе локальных координат, скажем $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, набором чисел $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$, где*

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \xi_i.$$

Ясно, что вычислив координаты касательного вектора в одной системе координат, всегда можно это сделать для других.

Про касательные векторы мы, пока, ничего не можем сказать (угол между векторами, длина вектора), кроме коллинеарности.

Касательные векторы в точке x_0 образуют n-мерное векторное пространство, которое называется касательным пространством T_{x_0} в точке x_0. Каждая локальная система координат задает в касательном пространстве базис, обозначаемый

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Вектор скорости $\dot{x}$ разлагается в этом базисе по формуле

$$\dot{x} = \dot{x}_1 \partial_1 + \dot{x}_2 \partial_2 + \ldots + \dot{x}_n \partial_n$$

Упражнения на закрепление

1. На многообразии M известна зависимость локальных координат x от y :

$$(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) = \psi(\varphi^{-1}(y_1, y_2)) = (y_1 y_2, y_1^2 + y_2^2).$$

Найдите касательный вектор $(1; 2)$ в точке $(0; 1)$, записанный в системе координат y, в координатах x.

2. На многообразии M известна зависимость локальных координат x от y :

$$(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) = \psi(\varphi^{-1}(y_1, y_2)) = (y_1 + 2y_2, 3y_1 + y_2^2).$$

Найдите касательный вектор $(2; 10)$ в точке $(0; 0)$, записанный в системе координат y, в координатах x.

3. На многообразии M известна зависимость локальных координат x от y :

$$(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) = \psi(\varphi^{-1}(y_1, y_2)) = (\cos y_1 \sin y_2, \sin y_1 \cos y_2).$$

Найдите касательный вектор $(1; 1)$ в точке $(0; \pi)$, записанный в системе координат y, в координатах x.

4. На многообразии M известна зависимость локальных координат x от y :

$$(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) = \psi(\varphi^{-1}(y_1, y_2)) = (y_1 e^{y_2}, e^{y_1} y_2).$$

Найдите касательный вектор $(3;2)$ в точке $(0;0)$, записанный в системе координат y, в координатах x.

5. На окружности S^2 точка $(\cos x_1, \sin x_1)$ имеет координаты $(\cos(\pi + y_1), \sin(\pi + y_1)$. Найдите касательный вектор -2 в точке π, записанный в системе координат y, в координатах x.

6. Рассмотрим $S^2 = \{t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \mid t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1\}$. Рассмотрим карты

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2) = (\cos x_1 \sin x_2, \cos x_1 \cos x_2, \sin x_1)$$

и

$$\psi^{-1}(y_1, y_2) = (\cos y_1 \sin y_2, \cos y_1 \cos y_2, -\sin y_1).$$

Без вычислений найдите касательный вектор $(0;2)$ в точке $(0, \pi)$, записанный в системе координат y, в координатах x.

Тензоры

В предыдущем параграфе мы определили касательные векторы как наборы чисел, которые связаны соотношениями

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \dot{y}_i.$$

Также имеет смысл следующее определение

Определение 23. *Кокасательным вектором к многообразию M в точке x_0 называется вектор, записываемый в системе локальных координат $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ набором чисел $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, а в другой системе локальных координат, скажем $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, набором чисел $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_n)$, где*

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \xi_i.$$

Лемма 22. *Градиент функции grad f относительно координат y имеет вид*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n} \right),$$

а в координатах x —

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \right),$$

поэтому градиент функции является ковектором.

Обобщением ковекторов и векторов являются тензоры:

Определение 24. *Тензором типа (k,l) в точке в точке x_0 называется такой объект $T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l}$, что его записи в различных системах координат связаны формулой*

$$ {}^{y}T^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_l} = \sum \frac{\partial y_{i_1}}{\partial x_{r_1}} \cdots \frac{\partial y_{i_k}}{\partial x_{r_k}} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{j_1}} \cdots \frac{\partial x_{s_l}}{\partial y_{j_l}} \; {}^{x}T^{r_1\ldots r_l}_{s_1\ldots s_k}. $$

Таким образом, касательный вектор является тензором типа $(1,0)$, а кокасательный вектор является тензором типа $(0,1)$.

Определим тензорное произведение тензоров A и B валентности (k,l) и (p,q) :

$$ (A\otimes B)^{i_1\ldots i_l r_1\ldots r_p}_{j_1\ldots j_k s_1\ldots s_q} = A^{i_1\ldots i_l}_{j_1\ldots j_k}\cdot B^{r_1\ldots r_p}_{s_1\ldots s_q}. $$

Базис $\partial_1,\ldots,\partial_n$ далее обозначается через $e_1,\ldots,e_n$. Определим $dx_1,\ldots,dx_n$ как функционалы $e^1,\ldots,e^n$ такие, что $e^i(e_j)=\delta^i_j$.

Тензоры $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_k}\otimes e^{j_1}\otimes\ldots\otimes e^{j_l}$ задают базис в пространстве тензоров валентности (k,l).

Скалярное произведение является тензором типа $(0,2)$.

Линейный оператор $Av=u$, где $A^j_i v_j = u_i$, задает тензор A^j_i валентности $(1,1)$.

Определение 25. *Тензор $T^{i_1\ldots i_k}$ называется кососимметрическим, если он меняет знак при любой четной перестановке индексов и сохраняет значение при любой четной.*

Аналогично определяется кососимметричный тензор $T^{j_1\ldots j_l}$.

Римановы многообразия

Определение 26. *Если в каждой точке x гладкого многообразия M задана скалярное произведение g, с помощью которой можно вычислять углы и длины касательных векторов и это скалярное произведение гладко зависит от $x \in M$, то (M, g) называется римановым многообразием.*

Дифференциальные формы и их интегрирование

Справедлива теорема

Теорема 6. *Для кососимметрических тензоров ранга n в n-мерном пространстве справедливо равенство*

$$^{y}T_{1\ldots n} = J\,{}^{x}T_{1\ldots n},$$

где $J = \det\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$ — якобиан.

Поскольку формула замены переменных для кратного интеграла имеет такой же вид, то можно считать, что подынтегральное выражение — кососимметрический тензор.

Теорема 7 (Общая формула Стокса)**.** *Для любой дифференциальной формы*

$$T = \sum_{i_1,\ldots,i_k} T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

с гладкими коэффициентами $T_{i_1\ldots i_k}$, *любой гладкой поверхности* $x_i(y_1,\ldots,y_n)$ *и ограниченной области* U *на ней с гладкой границей* Γ, *состоящей из одного куска, имеет место формула*

$$\pm\int_\Gamma T = \int_U dT.$$

В плоском случае, $n = 2$, формула Стокса называется формулой Грина. В трехмерном случае — это формула Гаусса-Остроградского.

Упражнения на закрепление

1. Выведите из определения $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.

2. Докажите, что $dx_i \wedge dx_i = 0$.

3. Для трехмерного пространства $n = 3$ докажите, что $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge v = 0$.

4. Пусть ω — дифференциальная форма типа $(0, n)$ в n-мерном пространстве. Докажите, что $d\omega = 0$.

5. Вычислите $\int_{[0,1]\times[0,1]} dx_1 \wedge dx_2$, где $[0,1]\times[0,1]$ — заполненный квадрат на плоскости с вершинами в точках с координатами 0 и 1.

6. Вычислите $\int_{[0,1]\times\{0\}} dx_1$, где $[0,1]\times\{0\}$ — отрезок на плоскости с вершинами в точках $(0,0)$ и $(1,0)$.

7. Вычислите $\int_{B(0,1)} dx_1 \wedge dx_2$, где $B(0,1)$ — диск на плоскости с центром в точке (0,0) и радиусом 1.

Литература

1. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифферен-

циальной геометрии и топологии М.: Наука, 1987

2. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии М.: Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2006

Дополнительная литература

3. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии М.: Изд-во МГУ, 1980

4. Фиников С.П. Курс дифференциальной геометрии М.: USSR, 2006

5. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология М.: Мир, 1972

6. Прасолов В.В. Задачи по топологии М.:МЦНМО, 2009

7. Прасолов В.В. Наглядная топология М.:МЦНМО, 2006

8. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977

Количество учебников [1] и [3] в библиотеке ЯГУ — 20 шт., [4] — 50 шт.

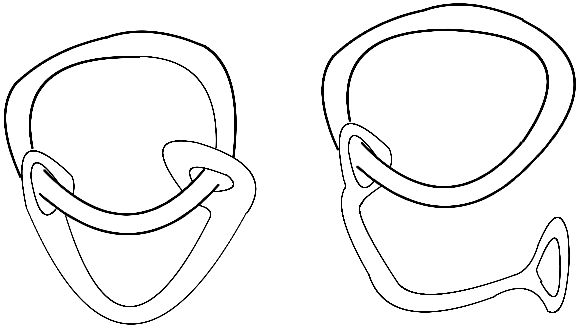
Шамаев Э.И.

Зачетные задачи по курсу «ТОПОЛОГИЯ»

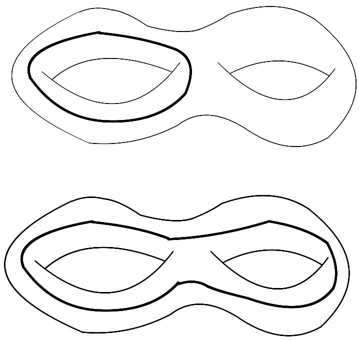
Якутск, 2009

Опубликовано на сайте http://yktmath.narod.ru

1. Докажите, что непрерывными деформациями поверхности рода 2 ее можно "связать" и "развязать" с тором (поверхностью рода 1).



2. Докажите, что непрерывными деформациями поверхности рода 2 с окрашенной окружностью можно получить поверхности с окружностью проходящей через две ручки поверхности.



3. Докажите, что окружность и кривая, выглядящая как цифра 8, не гомеоморфны.

4. Покажите существование биекции окружности на интервал $[0;1)$.

5. Покажите гомеморфность сферы с выколотой точкой и куба без одной грани.

6. Докажите, что окружность и [0;1] не гомеоморфны.

7. Найдите фундаментальную группу сферы с одной выколотой точкой.

8. Найдите фундаментальную группу плоскости с одной выколотой точкой.

9. Найдите фундаментальную группу куба без одной грани.

10. Найдите фундаментальную группу куба без одной вершины.

11. Покажите, что фундаментальная группа сферы без двух точек содержит хотя бы три элемента.

12. Покажите, сфера не гомеоморфна сфере без двух точек.

13. Покажите, сфера не гомеоморфна сфере без двух точек.

14. Можно ли на эллипсе определить метрику?

15. Можно ли на бутылке Клейна определить метрику?

16. Постройте гомеоморфизм между ветвью гиперболы и интервалом $(0;1)$.

17. Приведите пример топологического пространства в котором аксиома Хаусдорфа не выполняется.

18. Докажите, что атлас сферы не может состоять из одной карты.

19. Постройте гомеоморфизм между параболоидом и плоскостью. Докажите, что это гомеоморфизм.

20. Постройте на торе атлас. Попробуйте обойтись как можно меньшим числом карт.

21. Даны карты ψ и φ многообразия M. Известно, что $\psi^{-1} \circ \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, e^{x_2}, x_3 - x_2 x_1)$. Какую размерность имеет данное многообразие? Являются ли эти карты согласованными?

22. Совпадают ли фундаментальные группы поверхностей двух склеенных по одной точке окружностей и двух цилиндров склеенных по одной точке?

23. На карту Республики положили карту Республики меньшего масштаба. Докажите, что карты можно проткнуть булавкой так, что точки прокола на картах укажут на одну и ту же географическую точку Республики.

24. Определите какую-нибудь метрику в пространстве многочленов.

25. Определите какую-нибудь метрику в пространстве многоугольников.

26. Приведите пример топологического пространства, где отрезок $[0; 2010]$ является открытым множеством.

26. Покажите, что окружность не гомеоморфна числовой оси.

28. Почему только для $a = 0$ поверхность, заданная уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, не является гладким многообразием?

29. Почему только для $a = 0$ поверхность, заданная уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, не является гладким многообразием?