Экзаменационные вопросы по курсу Алгебры

Главное на экзамене — умение решать задачи и доказывать теоремы.

2 3 4 11 12 13 14 19 25 26 28 32 33 41 42 43 46 47 48 49 50

1 Подстановки. Четность подстановки. Определители матриц $n \times n$. Определители матрицы 2×2 и 3×3.

Теорема 1 *Верны равенства для любых квадратных матриц* 2×2 *и* 3×3.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + \ldots$$

$\triangleleft$ Вывести из общего определения. В первом случае для этого достаточно перечислить все подстановки с двумя элементами, во втором случае — с тремя элементами $\triangleright$

2 Теорема о существовании и единственности решения с. л. у. с невырожденной матрицей.

Теорема 2 *Пусть* A *— квадратная матрица. Если* $\det A \neq 0$, *то решение с.л.у.* $Ax = b$, *где* x *и* b *— матрицы-столбцы, существует и единственно.*

$\triangleleft$ Показать, что у невырожденной матрицы ранг является максимальным. Используя метод Гаусса, показать существование решения $\triangleright$

3 Теорема о пространстве решений о. с. л. у.

Теорема 3 *Пусть* A *— произвольная прямоугольная матрица. Множество решений о.с.л.у.* $Ax = 0$, *где* x *и* b *— матрицы столбы, образует векторное подпространство* $\mathbb{R}^n$, *где* n *— количество переменных.*

$\triangleleft$ Показать, что если x и y — решения о.с.л.у., то $x + y$ и λx — также решения данной о.с.л.у. $\triangleright$

4 Теорема о пространстве решений с.л.у.

Теорема 4 *Пусть* A *— произвольная прямоугольная матрица и* x_0 *— произвольное частное решение* $Ax_0 = b$. *Множество решений с.л.у.* $Ax = b$, *где* x *и* b *— матрицы столбы, равно множеству* $\{x_0 + y \mid y$ *— решение о. с. л. у.* $Ax = 0\}$.

$\triangleleft$ Показать, что если x решение с.л.у., то $x = x_0 + y$ для некоторого y решения о.с.л.у. и, обратно, если y решение о. с.л.у., то $x_0 + y$ решение с.л.у. $\triangleright$

5 Теорема о размерности пространства решений с. л. у.

Теорема 5 *Размерность пространства решений с.л.у.* $Ax = b$, *равна разности* $n - rang\ A$, *где* n *— количество переменных с.л.у.*

$\triangleleft$ Привести к ступенчатому виду. Далее «построить» общее решение. $\triangleright$

6 Умножение матриц. Матричное представление с.л.у. Теорема об определите транспонированной матрицы.

Теорема 6 *Для любой квадратной матрицы A верно равенство* $\det A = \det A^T$.

7 Теорема об определите произведения квадратных матриц. Следствие о определителе обратной матрицы. Следствие о не существовании обратной матрицы для вырожденных матриц.

Теорема 7 *Для любых квадратных матриц A и B верно равенство* $\det AB = \det A \det B$. ∇ *б.д.* $\triangle$

Следствие 1 *Для любой квадратной матрицы A верно равенство* $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Следствие 2 *Вырожденная квадратная матрица A не может иметь обратную.*

$\triangleleft$ Доказать от обратного. $\triangleright$

8 Лемма о диструбутивности произведения матриц. Лемма о не коммутативности произведения матриц.

Лемма 1 *Произведение матриц некоммутативно, т.е. существуют A и B такие, что $AB \neq BA$.*

$\triangleleft$ Привести пример $\triangleright$

9 Теорема о существовании и единственности решения матричного уравнения $AX = B$. Следствие о существовании обратной матрицы для невырожденных матриц.

Теорема 8 *Пусть A и B — квадратные матрицы размера $n \times n$. Если* $\det A \neq 0$, *то существует единственная квадратная матрица X размера $n \times n$ такая, что $AX = B$.*

$\triangleleft$ Представить в виде n систем линейных уравнений $\triangleright$

Следствие 3 *Пусть A — квадратная матрица размера $n \times n$. Если* $\det A \neq 0$, *то существует единственная обратная матрица A^{-1}.*

$\triangleleft$ Следует из предыдущей леммы $\triangleright$

10 Методы нахождения обратных матриц: формула нахождения обратной матрицы 2×2, нахождение обратной матрицы A элементарными преобразованиями строк матрицы $(E|A)$.

Лемма 2 *Справедливо равенство*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$\triangleleft$ Проверить умножением $\triangleright$

Лемма 3 *Элементарными преобразованиями с.л.у. (используемыми в методе Гаусса) можно всегда привести первую матрицу ко второй. При этом независимо от решения $B = A^{-1}$.*

$$(E|A) \sim \ldots \sim (B|E)$$

$\lhd$ Следует из леммы 8 $\rhd$

11 Векторные (линейные) пространства. Аксиомы векторного пространства. Примеры векторных пространств. Векторное подпространство. Критерий того, что подмножество векторного пространства является векторным подпространством.

Лемма 4 *Пусть V — векторное пространство. Подмножество $W \subset V$ является векторным подпространством V тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) для любых векторов $v, u \in W$ верно $v + u \in W$;

2) для любого вектора $v \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $\lambda v \in W$.

$\lhd$ Была доказана только половина утверждения: если два условия выполнены, то W — векторное подпространство V. Для этого достаточно проверить все аксиомы векторного пространства $\rhd$

12 Линейная комбинация системы векторов. Тривиальная линейная комбинация векторов. Линейно независимая и зависимая система векторов. Пример задачи выяснения линейной зависимости системы векторов.

13 Базис векторного пространства. Размерность векторного пространства. Координаты вектора. Лемма о существовании координат относительно базиса.

Лемма 5 *Пусть в векторном пространстве V выбран базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда каждый вектор $v \in V$ имеет свои координаты относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

$\lhd$ Следует из определения базиса и линейной зависимости $\rhd$

14 Линейная оболочка системы векторов. Лемма о том, что линейная оболочка системы векторов является векторным пространством. Примеры.

Лемма 6 *Пусть в векторном пространстве V даны векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Тогда линейная оболочка $< v_1, v_2, \ldots, v_k >$ является векторным пространством.*

$\lhd$ Следует из леммы 4 и определения линейной комбинации и линейной оболочки $\rhd$

15 Теорема о связи между о.с.л.у и ортогональными дополнениями. Задача нахождения базиса ортогонального дополнения.

Теорема 9 *Пусть в векторном пространстве V даны векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Тогда базис пространства решений о.с.л.у.*

$$\left(\begin{array}{c|c} \longleftarrow v_1 \longrightarrow & 0 \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow & 0 \\ \ldots & \ldots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow & 0 \end{array}\right)$$

является базисом $< v_1, v_2, \ldots, v_k >^{\perp}$.

$\lhd$ Доказательство использует идею $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ $\rhd$

16 Следствие о размерности ортогонального дополнения линейной оболочки линейно независимых векторов. Следствие о сумме размерности векторного подпространства W, его ортогонального дополнения $W^\perp$ и векторного пространства V.

Следствие 4 *Для любого векторного подпространства W векторного пространства V верно равенство*

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$

$\lhd$ Следует из теорем 9 и 5 $\rhd$

Следствие 5 *Если $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — линейно независимы, то*

$$\dim < v_1, v_2, \ldots, v_k >^\perp = n - k$$

$\lhd$ Следует из предыдущего следствия $\rhd$

17 Теорема о размерности линейной оболочки векторов и ранга матриц, составленной из координат векторов. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при умножении вектора на ненулевое число. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при замене v_i на $v_i + \lambda v_j$. Задача нахождения размерности линейной оболочки векторов.

Теорема 10 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы.*

Тогда

$$\dim < v_1, v_2, \ldots, v_k > = rang \begin{pmatrix} \longleftarrow & v_1 & \longrightarrow \\ \longleftarrow & v_2 & \longrightarrow \\ & \ldots & \\ \longleftarrow & v_k & \longrightarrow \end{pmatrix}$$

$\lhd$ Следует из теоремы 9 и следствий 4, 5 $\rhd$

Лемма 7 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы и λ ненулевое число.*

Верно равенство

$$< v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k > = < v_1, v_2, \ldots, \lambda v_i, \ldots, v_k > .$$

$\lhd$ Показать, что линейная оболочка не меняется при умножении одного из векторов на ненулевое число $\rhd$

Лемма 8 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы.*

Верно равенство

$$< v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k > = < v_1, v_2, \ldots, v_i + \lambda v_j, \ldots, v_k > .$$

$\lhd$ Показать, что линейная оболочка не меняется при таком сложении векторов $\rhd$

18 Линейное преобразование векторных пространств. Теорема об основном свойстве линейного преобразования.

Теорема 11 *Пусть* $e_1, e_2, \ldots, e_k$ *— базис векторного пространства* V. *Тогда для любого линейного преобразования* $f : V \to V$ *верно, что*

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n).$$

$\triangleleft$ Следует из определения линейных преобразований $\triangleright$

19 Следствие о том, что каждое линейное преобразование можно представить с помощью матрицы.

Следствие 6 *Сопоставим векторам* $v \in \mathbb{R}^n$ *с координатами* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *матрицы-столбцы* $\begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}$ *размера* $n \times 1$.

Тогда для любого линейного преобразования $f : V \to V$ *существует квадратная матрица* A *размера* $n \times n$ *такая, что* $f(v) = Av$.

$\triangleleft$ Следует из теоремы 11 $\triangleright$

20 Свойства линейных преобразований: образ нулевого вектора.

Лемма 9 *Пусть* $f(v)$ *— произвольное линейное преобразование векторного пространства* V. *Образ нулевого вектора* $f(0)$ *является нулевым вектором.*

$\triangleleft$ Следует из определения линейного преобразования $\triangleright$

21 Свойства линейных преобразований: образ противоположного вектора.

22 Лемма о том, что каждая матрица задает некоторое линейное преобразование.

Лемма 10 *Пусть* A *— квадратная матрица* $n \times n$. *Тогда отображение* Av *является линейным преобразованием.*

$\triangleleft$ Проверить определение линейного преобразования $\triangleright$

23 Собственные числа и собственные векторы линейных преобразований.

24 Характеристический многочлен матрицы A.

25 Лемма о корнях характеристического многочлена.

Лемма 11 *Комплексные корни характеристического многочлена матрицы* A *являются собственными числами матрицы* A.

$\triangleleft$ Выбрать произвольный корень λ_0. Показать, что уравнение $(A - \lambda E)v = 0$ имеет хотя бы одно ненулевое решение v. Затем показать, что $Av = \lambda v$ $\triangleright$

26 Жорданова форма матрицы. Теорема о жордановой форме $T^{-1}AT = J$ матрицы A, если собственные числа попарно различны.

Теорема 12 *Если* A *— квадратная матрица* $n \times n$ *такая, что*

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \ldots, Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *составляют базис* $\mathbb{R}^n$, *то верно равенство*

$$AT = TJ_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \ldots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

◁ Показать справедливость теоремы прямыми вычислениями ▷

27 Лемма о произведении собственных числах. Лемма о собственных векторах симметрической матрицы $A = A^T$.

Лемма 12 *Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *— собственные числа матрицы* A *размера* $n \times n$. *Тогда*

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

◁ Следует из теорем 13, 7 и подсчета определителя диагональной матрицы. ▷

Лемма 13 *Если* $A = A^T$, *т.е. матрица* A *является симметрической, то собственные числа матрицы* A *являются вещественными.* ∇ *б. д.* $\triangle$

28 Преобразования координат. Формула перевода старых координат в новые координаты. Матрица перехода.

Лемма 14 *Пусть* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *— координаты вектора* v *относительно нового базиса* $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ *и*

$(w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n})$ *— координаты вектора* w_1 *относительно базиса* e

$(w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n})$ *— координаты вектора* w_2 *относительно базиса* e

$\ldots$

$(w_{n1}, w_{n2}, \ldots, w_{nn})$ *— координаты вектора* w_n *относительно базиса* e.

Тогда координаты $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)$ *вектора* v *относительно старого базиса* $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ *удовлетворяют условию:*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \ldots & w_{n2} \\ & & & \\ w_{1n} & w_{2n} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \ldots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

◁ Переписать в выражении $v = v'_1 w_1 + v'_2 w_2 + \ldots + v'_n w_n$ векторы $w_1, w_2, \ldots, w_n$ через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ▷

29 Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису. Переход к новому базису из собственных векторов и жорданова форма матрицы.

Лемма 15 *Пусть* A *— матрица линейного преобразования* f *относительно старого базиса* W, B *— матрица линейного преобразования* f *относительно нового базиса* E *и* T *— матрица перехода от старых координат к новым. Тогда верно равенство* $B = T^{-1}AT$.

30 Теорема о жордановой форме матрицы при совпадении собственных чисел.

Теорема 13 *Пусть* f *— линейное преобразование* R^n *такое, что*

$$Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}, \quad Av_{k+2} = \lambda_{k+2} v_{k+2}, \quad \ldots, \quad Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ *линейно независимы, остальные собственные числа совпадают* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$.

Тогда существуют собственные и присоединенные к ним векторы $v_1, v_k, \dots, v_k$ такие, что

$$\begin{array}{llllll} v_{s_1} & \mapsto^f \dots & \mapsto^f v_2 & \mapsto^f v_1 & \mapsto^f 0; \\ v_{s_2} & \mapsto^f \dots & \mapsto^f v_{s_1+2} & \mapsto^f v_{s_1+1} & \mapsto^f 0; \\ & & \dots & & \\ v_k & \mapsto^f \dots & \mapsto^f v_{s_t+2} & \mapsto^f v_{s_t+1} & \mapsto^f 0; \end{array}$$

и верно равенство

$$AT = TJ, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \dots \\ \longleftarrow v_n \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J = \begin{pmatrix} J_1 & & \dots & & \\ & J_2 & \dots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \dots & J_{t+1} & \\ & & \dots & & J_{\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_n} \end{pmatrix},$$

где

$$J_1, J_2, \dots, J_{t+1} \text{ имеют вид } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

и размеры $s_1 \times s_1, (s_2 - s_1) \times (s_2 - s_1), \dots, (s_{t+1} - s_t) \times (s_{t+1} - s_t)$ соответственно. ∇ *б.д.* $\triangle$

31 Функции от матриц.

Теорема 14 *Найдите эту теорему в теореме.* ∇ *б.д.* $\triangle$

32 Многочлены $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$. Корень многочлена. Кратность корня многочлена. Основная теорема алгебры.

Теорема 15 (Основная теорема алгебры) *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени n имеет n корней с учетом кратности.* ∇ *б.д.* $\triangle$

33 Теорема Безу. Следствие из доказательства теоремы Безу.

Теорема 16 (Безу) *Если $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ имеет корень x_0, то многочлен $P(x)$ кратен многочлену $x - x_0$.*

$\triangleleft$ Выписать определение деления многочлена на многочлен с остатком. Показать, что степень остатка равна нулю, т.е. остаток является некоторым числом. Затем подстановкой $x = x_0$ показать, что остаток равен $P(x_0) = 0$ $\triangleright$

Следствие 7 *Остаток от деления с остатком многочлена $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ на многочлен $x - x_0$ равен $P(x_0)$.*

$\triangleleft$ Следует из доказательства теоремы Безу $\triangleright$

34 Теорема о разложении рациональной дроби в виде суммы простейших дробей.

Теорема 17 *Любое рациональное выражение $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ можно представить виде суммы некоторого многочлена $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ и простейших рациональных дробей.* ∇ *б.д.* $\triangle$

35 Сопряженное комплексное число. Лемма о сопряженных комплексных корнях. Следствие о представлении любого многочлена в виде произведения многочленов первой и второй степеней.

Лемма 16 *Если $Q(x) \in \mathbb{R}(x)$ имеет комплексный корень $a + bi \notin \mathbb{R}$, то сопряженное комплексное число $a - bi$ также является корнем $Q(x)$.*

$\lhd$ Рассмотреть сопряжение выражения $\overline{Q(a+bi)} = 0$ $\rhd$

Следствие 8 *Любой многочлен $Q(x) \in \mathbb{R}(x)$ можно представить в виде произведения*
$Q(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_r)(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\cdot\ldots\cdot(x^2+b_sx+c_s)$,
где $c, x_1, x_2, \ldots, x_r, b_1, b_2, \ldots, b_s, c_1, c_2, \ldots, c_s \in \mathbb{R}$.

$\lhd$ Разложить многочлен по основной теореме алгебры в произведение многочленов вида $x - z_0$, где $z_0 \in \mathbb{C}$ — корни многочлена $Q(x)$. Далее считаем, что первые r корней являются вещественными, а остальные комплексными, стоящими попарно со своими сопряженными. Осталось проверить, что многочлен $(x-z_0)(x-\overline{z}_0)$ имеет только вещественные коэффициенты. $\rhd$

36 Кольцо многочленов — сложение и умножение многочленов. Свойства кольца многочленов: ассоциативность, существование нуля, существование противоположного, коммутативность, ассоциативность умножения, существование единицы. дистрибутивность.

37 Лемма о том, что что кольцо многочленов является векторным пространством.

Лемма 17 *Кольца $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ являются векторными пространствами.*

$\lhd$ Проверить все аксиомы векторного пространства $\rhd$

38 Лемма о корректности определения операции деления с остатком: существование и единственность частного и остатка.

Лемма 18 *Операция деления с остатком на ненулевой многочлен в $\mathbb{K}[x]$ дает единственный результат*

$\lhd$ Доказать существование частного и остатка с помощью алгоритма «деления уголком». Доказать единственность от обратного $\rhd$

39 Следствие из основной теоремы алгебры. Теорема Виета.

Следствие 9 *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}(x)$ можно представить в виде произведения*

$$P(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.

$\lhd$ Следует из основной теоремы алгебры и теоремы Виета $\rhd$

Теорема 18 *Если* $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}(x)$ *имеет корни* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.

Тогда справедливы равенства

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & (-1)^n x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n; \\ a_1 & = & (-1)^{n-1}(x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + x_1x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + \ldots + x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}); \\ & \ldots & \\ a_{n-2} & = & x_1x_2 - x_1x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n; \\ a_{n-1} & = & -x_1 - x_2 - \ldots - x_n; \end{array}$$

$\lhd$ Проверить прямым подсчетом $\rhd$

40 Теорема о рациональных корнях многочлена.

Теорема 19 *Если* $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}(x)$ *с целыми коэффициентами имеет рациональный корень* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *то* a_n *кратно* q, *а* a_0 *кратно* p.
∇ *б.д.* $\triangle$

41 Оценка корней многочлен — теорема.

Теорема 20 (Оценка корней многочлена снизу и сверху) *Пусть* $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}(x)$. *Тогда все вещественные корни лежат на отрезке* $\left[-1 - \dfrac{A}{|a_n|}; 1 + \dfrac{A}{|a_n|}\right]$, *где* $A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$.

$\lhd$ Вывести, используя формулу суммирования геометрической прогрессии, из очевидного равенства $|a_nx_0^n| = |a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0 + a_0|$, где x_0 — корень $P(x)$. Не забудьте рассмотреть случаи $|x_0| > 1$ и $|x_0| < 1$ $\rhd$

42 Алгоритм Штурма определения числа вещественных корней. Оценка корней многочлена с помощью алгоритма Штурма.

43 Метод Ньютона.

44 Квадратичные формы. Мономы. Представление квадратичной формы с помощью матрицы.

45 Лемма о формуле изменения матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Лемма 19 *Пусть* A *— матрица квадратичной формы* $K(x) = x^TAx$ *относительно старого базиса.*

Пусть C *— матрица квадратичной формы* $K(x') = (x')^TCx'$ *относительно нового базиса. Пусть также* $x = Bx'$. *Тогда*

$$C = B^TAB.$$

$\lhd$ Доказывается в одну строчку $\rhd$

46 Теорема о приведении матрицы квадратичной формы к диагональному виду (другими словами о приведении квадратичной формы к каноническому).

Теорема 21 *Пусть $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для любой квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что в новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид.*

Другими словами для любой квадратной матрицы A существует квадратная матрица B такая, что матрица $B^T AB$ является диагональной.

◁ Привести алгоритм выделения полного квадрата такое, что избавляется от переменных в выражении ▷

47 Нормальный вид квадратичной формы. Сокращенная запись нормальной формы квадратичной формы.

Теорема 22 *Пусть $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для любой квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что в новом базисе квадратичная форма имеет нормальный вид.*

Другими словами для любой квадратной матрицы A существует квадратная матрица B такая, что матрица $B^T AB$ является диагональной с элементами -1, 1, 0 *по диагонали.*

◁ Вывести из предыдущей теоремы. ▷

48 Теорема «Закон инерции» об единственности нормального вида квадратичной формы.

Теорема 23 (Закон инерции) *Нормальная форма квадратичной формы единственна с точностью до переобозначения.*

◁ Доказать от обратного ▷

49 Положительно определенная квадратичная форма. Следствие о нормальном виде положительно. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Следствие 10 *Пусть квадратичная форма K в имеет следующий нормальный виде $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2 - x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2$. Форма K положительно определена тогда и только тогда, когда $l = 0$ и $k = n$.*

◁ В обе стороны очевидно ▷

Теорема 24 (Критерий Сильвестра) *Пусть A — матрица квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$. Тогда $K(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A положительны.* ∇ *б.д.* △

50 Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Лексиографический порядок на мономах. Основания теорема о симметрических многочленах.

Теорема 25 (Основаная о симметрических многочленах) *Каждый симметрический многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических.*

◁ Построить алгоритм построения таких многочленов. Из лексиографического отношения порядка следует конечность этого алгоритма. ▷