

# Экзаменационные вопросы по курсу Алгебры

Главное на экзамене — умение решать задачи и доказывать теоремы.

**2 3 4 11 12 13 14 19 25 26 28 32 33 41 42 43 46 47 48 49 50**

- 1 Подстановки. Четность подстановки. Определители матриц  $n \times n$ . Определители матрицы  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ .
- 2 Теорема о существовании и единственности решения с. л. у. с невырожденной матрицей.
- 3 Теорема о пространстве решений о. с. л. у.
- 4 Теорема о пространстве решений с.л.у.
- 5 Теорема о размерности пространства решений с. л. у.
- 6 Умножение матриц. Матричное представление с.л.у. Теорема об определителе транспонированной матрицы.
- 7 Теорема об определителе произведения квадратных матриц. Следствие о определителе обратной матрицы. Следствие о не существовании обратной матрицы для вырожденных матриц.
- 8 Лемма о дистрибутивности произведения матриц, Лемма о не коммутативности произведения матриц.
- 9 Теорема о существовании и единственности решения матричного уравнения  $AX = B$ . Следствие о существовании обратной матрицы для невырожденных матриц.
- 10 Методы нахождения обратных матриц: формула нахождения обратной матрицы  $2 \times 2$ , нахождение обратной матрицы  $A$  элементарными преобразованиями строк матрицы  $(E|A)$ .
- 11 Векторные (линейные) пространства. Аксиомы векторного пространства. Примеры векторных пространств. Векторное подпространство. Критерий того, что подмножество векторного пространства является векторным подпространством.
- 12 Линейная комбинация системы векторов. Тривиальная линейная комбинация векторов. Линейно независимая и зависимая система векторов. Пример задачи выяснения линейной зависимости системы векторов.
- 13 Базис векторного пространства. Размерность векторного пространства. Координаты вектора. Лемма о существовании координат относительно базиса.
- 14 Линейная оболочка системы векторов. Лемма о том, что линейная оболочка системы векторов является векторным пространством. Примеры.
- 15 Теорема о связи между о.с.л.у и ортогональными дополнениями. Задача нахождения базиса ортогонального дополнения.
- 16 Следствие о размерности ортогонального дополнения линейной оболочки линейно независимых векторов. Следствие о сумме размерности векторного подпространства  $W$ , его ортогонального дополнения  $W^\perp$  и векторного пространства  $V$ .
- 17 Теорема о размерности линейной оболочки векторов и ранга матриц, составленной из координат векторов. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при умножении вектора на ненулевое число. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при замене  $v_i$  на  $v_i + \lambda v_j$ . Задача нахождения размерности линейной оболочки векторов.
- 18 Линейное преобразование векторных пространств. Теорема об основном свойстве линейного преобразования.
- 19 Следствие о том, что каждое линейное преобразование можно представить с помощью матрицы.
- 20 Свойства линейных преобразований: образ нулевого вектора.
- 21 Свойства линейных преобразований: образ противоположного вектора.
- 22 Лемма о том, что каждая матрица задает некоторое линейное преобразование.
- 23 Собственные числа и собственные векторы линейных преобразований.

- 24 Характеристический многочлен матрицы  $A$ .
- 25 Лемма о корнях характеристического многочлена.
- 26 Жорданова форма матрицы. Теорема о жордановой форме  $T^{-1}AT = J$  матрицы  $A$ , если собственные числа попарно различны.
- 27 Лемма о произведении собственных числах. Лемма о собственных векторах симметрической матрицы  $A = A^T$ .
- 28 Преобразования координат. Формула перевода старых координат в новые координаты. Матрица перехода.
- 29 Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису. Переход к новому базису из собственных векторов и жорданова форма матрицы.
- 30 Теорема о жордановой форме матрицы при совпадении собственных чисел.
- 31 Функции от матриц.
- 32 Многочлены  $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ . Корень многочлена. Кратность корня многочлена. Основная теорема алгебры.
- 33 Теорема Безу. Следствие из доказательства теоремы Безу.
- 34 Теорема о разложении рациональной дроби в виде суммы простейших дробей.
- 35 Сопряженное комплексное число. Лемма о сопряженных комплексных корнях. Следствие о представлении любого многочлена в виде произведения многочленов первой и второй степеней.
- 36 Кольцо многочленов — сложение и умножение многочленов. Свойства кольца многочленов: ассоциативность, существование нуля, существование противоположного, коммутативность, ассоциативность умножения, существование единицы. дистрибутивность.
- 37 Лемма о том, что что кольцо многочленов является векторным пространством.
- 38 Лемма о корректности определения операции деления с остатком: существование и единственность частного и остатка.
- 39 Следствие из основной теоремы алгебры. Теорема Виета.
- 40 Теорема о рациональных корнях многочлена.
- 41 Оценка корней многочлен — теорема.
- 42 Алгоритм Штурма определения числа вещественных корней. Оценка корней многочлена с помощью алгоритма Штурма.
- 43 Метод Ньютона.
- 44 Квадратичные формы. Мономы. Представление квадратичной формы с помощью матрицы.
- 45 Лемма о формуле изменения матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.
- 46 Теорема о приведении матрицы квадратичной формы к диагональному виду (другими словами о приведении квадратичной формы к каноническому).
- 47 Нормальный вид квадратичной формы. Сокращенная запись нормальной формы квадратичной формы.
- 48 Теорема «Закон инерции» об единственности нормального вида квадратичной формы.
- 49 Положительно определенная квадратичная форма. Следствие о нормальном виде положительно. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.
- 50 Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Лексикографический порядок на мономах. Основания теорема о симметрических многочленах.