Вариант 1.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;2;2), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;3;1), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;1;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;4;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;2;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;3;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;1;2;4;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;4;3;1;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;2;1;3;0), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (0;0;2;3;0). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;4;3)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,2).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;2;3)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,2),\quad \mathbf{e}_3 = (0,2,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 2x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 4, \quad \mathbf{e}_3 = 2$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,2,2),\quad \mathbf{e}_2 = (2,4,3),\quad \mathbf{e}_3 = (2,4,2);$$

$$\mathbf{g}_1 = (2,2,3),\quad \mathbf{g}_2 = (2,4,2),\quad \mathbf{g}_3 = (2,3,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^2 - 2x + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^2 + 5x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 3x + 3$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования.

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (0,2\ ,-3), \quad v_2 = (1,-1,-1), \quad v_3 = (1,0,-2),$$
$$w_1 = (-4,-1,-4), \quad w_2 = (2,-4,3), \quad w_3 = (0,-4,1\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (5x+5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ -7 & -11 & -5 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A_φ^e. Найдите матрицу A_φ^g линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (0,1,1), \\ g_2 &= (0,-2,-1), \\ g_3 &= (1,-2,\ -2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $0, 2,\ 4$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = T Diag(0,2,4) T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (0,0)$, $B = (5,3)$, $C = (2,-2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-2,1,5,1), \quad \boldsymbol{w} = (0,5,0,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,3,5,1), \mathbf{e}_2 = (5,4,5,5), \mathbf{e}_3 = (2,2,3,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 4y + 4z = 3; \\ 5x + 3y + 3z = 5; \\ 2x + 2y + 5z = 2. \end{cases}$$

Вариант 2.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (1;1;1),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;3;2),\quad \boldsymbol{v}_3 = (2;1;2).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (4;2;2),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;4;2),\quad \boldsymbol{v}_3 = (2;2;3).$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (4;3;1;1;0),\quad \boldsymbol{v}_2 = (4;0;2;0;4),\quad \boldsymbol{v}_3 = (4;2;0;1;3),\quad \boldsymbol{v}_4 = (4;4;1;0;0).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;0;0)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,2).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;0;0)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,3),\quad \mathbf{e}_3 = (0,3,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 4x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 4x$, $\mathbf{e}_2 = 3x^2 + 4$, $\mathbf{e}_3 = 2$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,4,4),\quad \mathbf{e}_2 = (3,3,2),\quad \mathbf{e}_3 = (4,3,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,2,3),\quad \mathbf{g}_2 = (4,4,4),\quad \mathbf{g}_3 = (2,3,2).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = 3x^2 - 4x + 3,\quad \boldsymbol{v}_2 = 2x^2 + 4x + 3,\quad \boldsymbol{v}_3 = 5x^2 + 5x - 2$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^2 + 4x + 2$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-3, 0, 1),\quad v_2 = (0,1,0),\quad v_3 = (1,1,0),$$

$$w_1 = (1,3,3),\quad w_2 = (0,-1,-1),\quad w_3 = (0,-3,-2).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x+5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},\qquad \begin{aligned} g_1 &= (-2,-1,0), \\ g_2 &= (2,0,1), \\ g_3 &= (1,1,0). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-1, 2, 2$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = T Diag(-1,2,2) T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (2,3)$, $B = (5,0)$, $C = (0,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,0,3,3),\quad \boldsymbol{w} = (4,2,1,4).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,5,0,-2), \mathbf{e}_2 = (-2,-1,2,-1), \mathbf{e}_3 = (1,2,1,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 5y + 4z = 5; \\ 3x + 2y + 3z = 5; \\ 2x + 2y + 3z = 2. \end{cases}$$

Вариант 3.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;1;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;3;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;1;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;4;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4;3;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;4;4). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;2;4;3;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;3;2;3;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;1;3;1;1), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (0;2;1;1;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;-1;1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\\ \mathbf{e}_2 = (0,2,0),\\ \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;0;0)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\\ \mathbf{e}_2 = (0,4,4),\\ \mathbf{e}_3 = (0,3,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 2x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 3x^2 + 4, \quad \mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (4,3,4),\\ \mathbf{e}_2 = (3,3,4),\\ \mathbf{e}_3 = (2,2,2);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,2,3),\\ \mathbf{g}_2 = (2,2,3),\\ \mathbf{g}_3 = (4,4,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 2x + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 5x + 5, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^2 + 4x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-3, -2\ , 1), \quad v_2 = (0, -1, 1), \quad v_3 = (-1, 2, -2),$$

$$w_1 = (3, 13, -2), \quad w_2 = (0, 3, 1), \quad w_3 = (1, -3, -3\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x + 2)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (-1, -1, 1), \\ g_2 &= (-1, 0, 0), \\ g_3 &= (-3, 0,\ -1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $0, 4,\ 5$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(0,4,5)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (5,5)$, $B = (-2,4)$, $C = (-1,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (3,5,5,-1), \quad \boldsymbol{w} = (1,3,-1,5).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,5,-1,4), \mathbf{e}_2 = (1,-2,5,2), \mathbf{e}_3 = (-2,0,5,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 4y + 4z = 4; \\ 5x + 3y + 4z = 3; \\ 2x + 2y + 5z = 2. \end{cases}$$

Вариант 4.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;2;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;1;1), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;2;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;4;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;2;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;4;3). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (0;3;3;4;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;0;4;3;1), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;0;2;0;4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4;2;0;4;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;2;3)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,3).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;-1;1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,4),\quad \mathbf{e}_3 = (0,3,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 3x^2 + 3, \quad \mathbf{e}_3 = 3$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (3,3,2),\quad \mathbf{e}_2 = (3,3,2),\quad \mathbf{e}_3 = (3,3,4);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,3,4),\quad \mathbf{g}_2 = (3,3,3),\quad \mathbf{g}_3 = (3,3,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^2 - 4x + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^2 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^2 + 5x - 5 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 5x + 3$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-1, 1\ , 1), \quad v_2 = (0, 1, -1), \quad v_3 = (0, 1, 0),$$

$$w_1 = (0, 0, 1), \quad w_2 = (-1, 1, 1), \quad w_3 = (-1, 0, 1\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (5x + 6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (1, -1, 1), \\ g_2 &= (0, 1, 1), \\ g_3 &= (-1, -1,\ -2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-2, 5,\ 2$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-2, 5, 2)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (4,3)$, $B = (3,3)$, $C = (2,4)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-2, 5, 4, 1), \quad \boldsymbol{w} = (3, 1, -2, 3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,0,3,-1), \mathbf{e}_2 = (1,2,-1,2), \mathbf{e}_3 = (-2,2,5,-2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y + 5z = 4; \\ 4x + 4y + 2z = 2; \\ 3x + 4y + 3z = 5. \end{cases}$$

Вариант 5.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;2;2),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;3;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;2;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;2;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;4;4),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;2;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4;4;1;3;0),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;0;4;1;0),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;4;2;2;3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (0;0;0;0;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;0;1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;-1;-1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,2),\quad \mathbf{e}_3 = (0,2,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 2, \quad \mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (4,4,3),\quad \mathbf{e}_2 = (2,2,2),\quad \mathbf{e}_3 = (3,2,4);$$

$$\mathbf{g}_1 = (4,3,2),\quad \mathbf{g}_2 = (2,4,4),\quad \mathbf{g}_3 = (3,4,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 5x + 4,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 4x + 2,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^2 + 4x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-1, 0, 1),\quad v_2 = (-2,-2,-3),\quad v_3 = (0,1,2),$$

$$w_1 = (0,0,1),\quad w_2 = (-2,9,3),\quad w_3 = (1,-4,-1).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (5x+4)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 4\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3\\ -2 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (-1,-1,-3),\\ g_2 &= (-1,-2,-1),\\ g_3 &= (-1,\ -3, 2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 2\\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -6 & -4\\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-1, 5,\ 2$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-1,5,2)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-2,4)$, $B = (3,-2)$, $C = (0,0)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,1,5,-2),\quad \boldsymbol{w} = (4,0,4,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,-1,2,-2), \mathbf{e}_2 = (-1,-1,2,0), \mathbf{e}_3 = (3,0,1,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 4;\\ 3x + 4y + 2z = 5;\\ 4x + 2y + 4z = 3. \end{cases}$$

Вариант 6.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;3;2), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;2;1), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;3;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;4;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;3;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;2;4). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;3;0;0;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4;3;3;0;0), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (0;3;1;2;2), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (1;3;4;4;4). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;0;3)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0), \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;1;0)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,4,4), \quad \mathbf{e}_3 = (0,3,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 3x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 3x^2 + 4, \quad \mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (3,2,4), \quad \mathbf{e}_2 = (2,2,2), \quad \mathbf{e}_3 = (4,3,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (2,2,3), \quad \mathbf{g}_2 = (4,2,4), \quad \mathbf{g}_3 = (3,3,2).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^2 - 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^2 + 5x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 2x + 5$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-3, -1\ , 0), \quad v_2 = (-1, 0, -2), \quad v_3 = (1, 1, -3),$$

$$w_1 = (-5, 4, 0), \quad w_2 = (3, 7, 4), \quad w_3 = (9, 7, 6).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x + 6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} g_1 &= (-1, 1, -2), \\ g_2 &= (0, 0, -1), \\ g_3 &= (-2, 1,\ 1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 24 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-3, 2,\ 0$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-3, 2, 0)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-2,-1)$, $B = (1,3)$, $C = (4,-1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (0,0,-2,2), \quad \boldsymbol{w} = (3,0,5,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,1,-1,4), \mathbf{e}_2 = (4,5,-1,2), \mathbf{e}_3 = (-2,3,-2,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 3; \\ 2x + 3y + 2z = 3; \\ 5x + 3y + 4z = 4. \end{cases}$$

Вариант 7.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;1;2),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;3;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;2;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;2;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;4;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;3;3). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;1;3;4;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;0;3;0;2),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;4;1;4;1),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (2;3;4;0;0). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;4;2)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,3).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;0;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,4),\quad \mathbf{e}_3 = (0,3,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 3x^2 + 3, \quad \mathbf{e}_3 = 3,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,2,2),\quad \mathbf{e}_2 = (2,3,2),\quad \mathbf{e}_3 = (2,4,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (2,3,4),\quad \mathbf{g}_2 = (2,2,4),\quad \mathbf{g}_3 = (2,3,2).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 5x + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 3x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^2 + 4x + 5$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (0,-3\ ,-1), \quad v_2 = (-1,-2,-2), \quad v_3 = (1,-2,1),$$

$$w_1 = (1,-1,2), \quad w_2 = (2,0,0), \quad w_3 = (-1,-1,3\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (5x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A_φ^e. Найдите матрицу A_φ^g линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1\\ -3 & 2 & -3\\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (1,1,-2),\\ g_2 &= (0,-2,1),\\ g_3 &= (0,-3,\ 1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & 1\\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -6\\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-3, 5,\ 5$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-3,5,5)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (3,3)$, $B = (4,1)$, $C = (5,-1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (1,-1,5,5), \quad \boldsymbol{w} = (-1,5,1,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,3,4,1), \mathbf{e}_2 = (5,-1,-1,2), \mathbf{e}_3 = (5,-1,-1,0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4;\\ 3x + 2y + 4z = 4;\\ 4x + 4y + 4z = 3. \end{cases}$$

Вариант 8.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;2;2),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;1;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;3;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;4;2),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4;3;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;2;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4;2;4;4;0),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;0;2;4;1),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;3;2;4;2),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (1;1;0;2;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;3;0)$ относительно базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,4,0),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,2). \end{aligned}$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;1;2)$ относительно базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (4,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,2,3),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,3,2), \end{aligned}$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 2x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 4x, \quad \mathbf{e}_2 = 3x^2 + 3, \quad \mathbf{e}_3 = 2$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (2,2,2),\\ \mathbf{e}_2 &= (3,3,2),\\ \mathbf{e}_3 &= (4,4,4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (3,4,4),\\ \mathbf{g}_2 &= (4,3,4),\\ \mathbf{g}_3 &= (2,4,4). \end{aligned}$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 3x + 4,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^2 + 3x + 4,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 2x - 5 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^2 + 5x + 2$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (-2, -3\ , 0), \quad v_2 = (-3, 1, 1), \quad v_3 = (-2, 2, 1),$

$w_1 = (11, 5, 1), \quad w_2 = (-2, 1, -3), \quad w_3 = (-6, -1, -3\ ).$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x + 5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3\\ -3 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (0, -2, -3),\\ g_2 &= (2, -1, -2),\\ g_3 &= (-1, -1,\ -1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -4 & -3\\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 80\\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-3, 3,\ 4$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-3, 3, 4)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-1,5)$, $B = (-2,5)$, $C = (5,4)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (1,4,-1,1), \quad \boldsymbol{w} = (0,4,3,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,2,3,0), \mathbf{e}_2 = (3,4,-2,1), \mathbf{e}_3 = (4,1,0,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y + 4z = 4;\\ 3x + 3y + 4z = 2;\\ 2x + 3y + 5z = 4. \end{cases}$$

Вариант 9.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (3;3;3),\quad \boldsymbol{v}_2 = (1;2;2),\quad \boldsymbol{v}_3 = (2;1;2).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (2;3;2),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;3;2),\quad \boldsymbol{v}_3 = (4;2;4).$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (2;0;2;3;0),\quad \boldsymbol{v}_2 = (0;4;2;0;3),\quad \boldsymbol{v}_3 = (3;1;0;4;1),\quad \boldsymbol{v}_4 = (1;3;0;3;4).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;3;2)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;3;3)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,3),\quad \mathbf{e}_3 = (0,2,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 3x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 4x,\quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 2,\quad \mathbf{e}_3 = 3,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (3,2,3),\quad \mathbf{e}_2 = (2,3,2),\quad \mathbf{e}_3 = (4,2,4);$$

$$\mathbf{g}_1 = (2,3,2),\quad \mathbf{g}_2 = (4,4,4),\quad \mathbf{g}_3 = (3,3,4).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = 5x^2 - 2x + 3,\quad \boldsymbol{v}_2 = 2x^2 + 4x + 5,\quad \boldsymbol{v}_3 = 3x^2 + 5x - 2$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 2x + 2$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (-1, -1, -2),\quad v_2 = (-2, -1, -1),\quad v_3 = (-2, -1, 0),$

$w_1 = (-2, 0, -1),\quad w_2 = (-3, -1, -2),\quad w_3 = (-3, -2, -2).$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (2x + 4)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\qquad \begin{aligned} g_1 &= (1,1,1), \\ g_2 &= (0,0,1), \\ g_3 &= (-1,0,-2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $0, 2,\ 1$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(0,2,1)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (5,-1)$, $B = (2,1)$, $C = (-1,2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (3,1,0,-2),\quad \boldsymbol{w} = (0,2,2,4).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,3,1,-1), \mathbf{e}_2 = (2,1,1,3), \mathbf{e}_3 = (5,-2,-2,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 4; \\ 5x + 4y + 4z = 5; \\ 2x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Вариант 10.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;1;2),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;1;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;1;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;4;4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;3;2),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;3;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;2;2;0;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;0;0;3;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (0;1;0;4;0),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (2;4;0;2;0). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;4;3)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;-1;3)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,3),\quad \mathbf{e}_3 = (0,4,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 4x$, $\mathbf{e}_2 = 4x^2 + 4$, $\mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (4,3,3),\quad \mathbf{e}_2 = (4,2,4),\quad \mathbf{e}_3 = (4,4,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,2,2),\quad \mathbf{g}_2 = (3,4,4),\quad \mathbf{g}_3 = (3,3,2).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^2 - 5x + 5,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 3x^2 + 4x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^2 + 4x - 5 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 3x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (1,-1\ ,1),\quad v_2 = (-1,1,0),\quad v_3 = (1,0,1),$$

$$w_1 = (-1,-1,-5),\quad w_2 = (0,1,3),\quad w_3 = (-4,1,-3\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (5x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 18\\ -3 & 2 & 6\\ -6 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},\qquad \begin{aligned} g_1 &= (-1,0,-1),\\ g_2 &= (1,1,1),\\ g_3 &= (1,-1,\ 2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -2\\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -6\\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами 1, 3, 4 и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(1,3,4)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-1,4)$, $B = (2,-1)$, $C = (-2,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (2,1,1,3),\quad \boldsymbol{w} = (0,2,2,1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,5,-1,5), \mathbf{e}_2 = (-1,-2,-2,3), \mathbf{e}_3 = (5,1,5,2)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 5y + 2z = 3;\\ 4x + 4y + 4z = 4;\\ 3x + 4y + 2z = 4. \end{cases}$$

Вариант 11.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;2;1),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;2;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;1;2). \end{aligned}$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;3;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;3;2),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;2;3). \end{aligned}$$
Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;4;1;2;1),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;1;1;2;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;3;1;4;0),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (0;3;4;4;2). \end{aligned}$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;0;0)$ относительно базиса
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (2,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,3,0),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,4). \end{aligned}$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;3;0)$ относительно базиса
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,4,2),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,2,4), \end{aligned}$$
если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 2x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 2, \quad \mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,2,3),\\ \mathbf{e}_2 &= (4,4,3),\\ \mathbf{e}_3 &= (2,4,4); \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (4,3,2),\\ \mathbf{g}_2 &= (2,2,3),\\ \mathbf{g}_3 &= (3,2,4). \end{aligned}$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 2x + 5,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 3x + 4,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$
базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^2 + 3x + 5$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.
$$v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (1,0,-1), \quad v_3 = (1,-1,2),$$
$$w_1 = (-3,1,0), \quad w_2 = (-4,1,0), \quad w_3 = (1,3,1).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ -1 & 5 & -3\\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.
$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (-2,1,-2),\\ g_2 &= (2,2,-3),\\ g_3 &= (-3,1,-2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 6\\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 4\\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами 1, 5, 5 и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то
$$A_\varphi = T Diag(1,5,5) T^{-1}, \text{ где } T = (v_1 v_2 \ldots v_n).$$

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-1,3)$, $B = (0,0)$, $C = (1,-2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.
$$\boldsymbol{v} = (5,3,1,-2), \quad \boldsymbol{w} = (0,2,-2,4).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,2,4,3), \mathbf{e}_2 = (4,4,5,-1), \mathbf{e}_3 = (4,1,-2,5)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 2;\\ 4x + 3y + 2z = 5;\\ 5x + 4y + 2z = 4. \end{cases}$$

Вариант 12.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (2;1;1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (3;1;1), \quad \boldsymbol{v}_3 = (1;1;1).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (4;4;4), \quad \boldsymbol{v}_2 = (4;4;4), \quad \boldsymbol{v}_3 = (2;3;4).$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (3;0;1;4;1), \quad \boldsymbol{v}_2 = (3;4;1;0;0), \quad \boldsymbol{v}_3 = (3;0;1;1;4), \quad \boldsymbol{v}_4 = (3;1;1;0;0).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;1;1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,3,0), \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,2).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (3;0;0)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,2,3), \quad \mathbf{e}_3 = (0,4,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 2x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 3x^2 + 4, \quad \mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (4,3,2), \quad \mathbf{e}_2 = (3,3,2), \quad \mathbf{e}_3 = (2,3,2);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,2,2), \quad \mathbf{g}_2 = (2,2,2), \quad \mathbf{g}_3 = (4,2,2).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = 4x^2 - 2x + 4, \quad \boldsymbol{v}_2 = 3x^2 + 5x + 4, \quad \boldsymbol{v}_3 = 2x^2 + 4x - 5$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 5x + 5$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-1, 0, 0), \quad v_2 = (1, -2, 1), \quad v_3 = (2, -3, 1),$$

$$w_1 = (-1, 1, -1), \quad w_2 = (3, -6, -1), \quad w_3 = (5, -9, -1).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (6x + 6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A_φ^e. Найдите матрицу A_φ^g линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} g_1 = (1,1,0), \\ g_2 = (-3,-3,-1), \\ g_3 = (0,-1,\ -2). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-3, 4,\ 5$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-3,4,5)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (3,5)$, $B = (2,4)$, $C = (1,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,-1,-1,1), \quad \boldsymbol{w} = (-2,3,4,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,2,0,-1), \mathbf{e}_2 = (0,3,0,0), \mathbf{e}_3 = (1,0,0,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 5y + 4z = 3; \\ 4x + 4y + 4z = 5; \\ 3x + 3y + 4z = 4. \end{cases}$$

Вариант 13.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (1;1;3),\quad \boldsymbol{v}_2 = (1;1;1),\quad \boldsymbol{v}_3 = (1;1;2).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (2;3;3),\quad \boldsymbol{v}_2 = (2;3;4),\quad \boldsymbol{v}_3 = (2;3;2).$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (4;4;2;1;2),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;4;2;1;3),\quad \boldsymbol{v}_3 = (2;4;2;4;1),\quad \boldsymbol{v}_4 = (1;4;2;4;2).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;4;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;4;3)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,4),\quad \mathbf{e}_3 = (0,4,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 4x$, $\mathbf{e}_2 = 4x^2 + 2$, $\mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (3,3,2),\quad \mathbf{e}_2 = (3,3,4),\quad \mathbf{e}_3 = (3,3,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,3,2),\quad \mathbf{g}_2 = (3,3,4),\quad \mathbf{g}_3 = (3,3,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = 4x^2 - 3x + 3,\quad \boldsymbol{v}_2 = 5x^2 + 4x + 4,\quad \boldsymbol{v}_3 = 2x^2 + 5x - 5$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 5x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (1, -2\ , 1),\quad v_2 = (0,1,0),\quad v_3 = (1,0,0),$$

$$w_1 = (7,-6,1),\quad w_2 = (-2,1,0),\quad w_3 = (1,-1,0\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x+3)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix},\qquad \begin{array}{l} g_1 = (2,0,-1), \\ g_2 = (-1,-1,-2), \\ g_3 = (-1,0,\ 0). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-2, 5,\ 1$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-2,5,1)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (1,2)$, $B = (-2,3)$, $C = (3,4)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (0,0,2,4),\quad \boldsymbol{w} = (-2,-2,0,2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2,5,0,4), \mathbf{e}_2 = (-2,4,0,0), \mathbf{e}_3 = (-1,0,3,0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 4y + 5z = 5; \\ 2x + 4y + 2z = 2; \\ 3x + 5y + 3z = 4. \end{cases}$$

Вариант 14.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;3;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;1;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;1;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;4;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;4;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;4;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (0;3;4;4;0), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;2;4;3;0), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;1;4;0;3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4;0;1;4;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;2;0)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0), \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,3).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;4;-1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,3,2), \quad \mathbf{e}_3 = (0,4,3),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 4x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 4x^2 + 2, \quad \mathbf{e}_3 = 3$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (3,4,4), \quad \mathbf{e}_2 = (3,4,2), \quad \mathbf{e}_3 = (4,2,4);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,3,4), \quad \mathbf{g}_2 = (4,3,2), \quad \mathbf{g}_3 = (2,3,4).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^2 - 2x + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 5x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (-2, -2\,, 1), \quad v_2 = (-2, -1, -2), \quad v_3 = (-1, -1, 0),$

$w_1 = (4, 1, 1), \quad w_2 = (2, 10, -3), \quad w_3 = (2, 2, 0\ ).$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x + 3)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} g_1 &= (-1, 0, -2), \\ g_2 &= (0, 1, -2), \\ g_3 &= (-3, -2, \ -1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами 1, 1, 2 и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, \ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(1,1,2)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (5,2)$, $B = (0,5)$, $C = (3,0)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (0,3,0,0), \quad \boldsymbol{w} = (0,5,-2,4).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,4,3,2), \mathbf{e}_2 = (5,2,3,4), \mathbf{e}_3 = (4,-2,-2,-1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 5y + 5z = 3; \\ 2x + 4y + 3z = 4; \\ 5x + 3y + 4z = 4. \end{cases}$$

Вариант 15.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\boldsymbol{v}_1 = (2;1;1),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;1;1),\quad \boldsymbol{v}_3 = (1;2;2).$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\boldsymbol{v}_1 = (4;3;3),\quad \boldsymbol{v}_2 = (4;3;3),\quad \boldsymbol{v}_3 = (2;4;3).$$
Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора
$$\boldsymbol{v}_1 = (0;0;2;0;0),\quad \boldsymbol{v}_2 = (2;3;2;3;2),\quad \boldsymbol{v}_3 = (4;3;2;4;2),\quad \boldsymbol{v}_4 = (1;1;4;2;4).$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;-1;-1)$ относительно базиса
$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,2).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;2;3)$ относительно базиса
$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,4),\quad \mathbf{e}_3 = (0,3,2),$$
если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 2x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 3x^2 + 3, \quad \mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$$\mathbf{e}_1 = (4,4,4),\quad \mathbf{e}_2 = (3,4,2),\quad \mathbf{e}_3 = (2,2,3);$$
$$\mathbf{g}_1 = (3,4,4),\quad \mathbf{g}_2 = (2,4,2),\quad \mathbf{g}_3 = (4,2,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы
$$\boldsymbol{v}_1 = 2x^2 - 3x + 4,\quad \boldsymbol{v}_2 = 3x^2 + 4x + 3,\quad \boldsymbol{v}_3 = 4x^2 + 4x - 2$$
базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 5x + 2$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.
$$v_1 = (-1,0,1),\quad v_2 = (1,-1,1),\quad v_3 = (1,0,-2),$$
$$w_1 = (0,1,-4),\quad w_2 = (1,3,-2),\quad w_3 = (0,-2,7).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (6x+5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.
$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix},\qquad g_1 = (0,-1,-1),\ g_2 = (1,-1,0),\ g_3 = (0,1,0).$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1, 0, 2$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то
$$A_\varphi = TDiag(1,0,2)T^{-1},\ \text{где } T = (v_1 v_2 \ldots v_n).$$

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-2,5)$, $B = (-1,2)$, $C = (0,-1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.
$$\boldsymbol{v} = (4,1,5,3),\quad \boldsymbol{w} = (1,-2,-1,2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,5,5,-1), \mathbf{e}_2 = (4,0,0,4), \mathbf{e}_3 = (0,2,2,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 5; \\ 3x + 3y + 3z = 5; \\ 4x + 3y + 5z = 4. \end{cases}$$

Вариант 16.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;3;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;1;2),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;1;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;4;2),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;4;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;2;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;0;4;4;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;4;1;1;0),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;1;1;1;4),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (0;0;3;3;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (3;3;0)$ относительно базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,2,0),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,2). \end{aligned}$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;2;3)$ относительно базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (2,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,2,2),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,2,3), \end{aligned}$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 4x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 2, \quad \mathbf{e}_3 = 2,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (4,2,4),\\ \mathbf{e}_2 &= (4,3,4),\\ \mathbf{e}_3 &= (4,4,4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (4,3,4),\\ \mathbf{g}_2 &= (4,4,2),\\ \mathbf{g}_3 &= (4,2,2). \end{aligned}$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 2x + 5,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^2 + 5x + 5,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 3x - 4 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 3x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-3,0\ ,1), \quad v_2 = (-1,1,0), \quad v_3 = (1,-2,0),$$

$$w_1 = (0,-2,-4), \quad w_2 = (1,1,-2), \quad w_3 = (-2,-2,3\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (2x+3)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 18\\ -3 & 2 & 6\\ -6 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} g_1 &= (0,0,-1),\\ g_2 &= (0,-1,1),\\ g_3 &= (1,0,\ 1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -3\\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1, 0,\ 1$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(1,0,1)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (4,3)$, $B = (3,1)$, $C = (2,0)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-2,2,2,5), \quad \boldsymbol{w} = (1,-1,3,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,0,-2,3), \mathbf{e}_2 = (1,-1,0,1), \mathbf{e}_3 = (2,3,0,0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2z = 2;\\ 5x + 3y + 2z = 4;\\ 4x + 2y + 5z = 3. \end{cases}$$

Вариант 17.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;3;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;1;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;2;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;2;4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;3;4),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;4;4). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4;4;2;0;1),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4;0;4;1;2),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;3;4;2;3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (4;1;1;1;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (3;-1;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,3).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;0;1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,4),\quad \mathbf{e}_3 = (0,4,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 4x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 4x^2 + 3, \quad \mathbf{e}_3 = 3,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,4,2),\quad \mathbf{e}_2 = (3,2,4),\quad \mathbf{e}_3 = (4,4,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,4,2),\quad \mathbf{g}_2 = (4,2,4),\quad \mathbf{g}_3 = (2,3,4).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^2 - 4x + 5,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^2 + 4x + 5,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (0,1\ ,1), \quad v_2 = (-2,0,-1), \quad v_3 = (-1,-1,-1),$$

$$w_1 = (0,-2,-1), \quad w_2 = (6,4,-2), \quad w_3 = (2,3,0\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x+5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 6\\ 6 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 1\\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} g_1 &= (-1,-1,-1),\\ g_2 &= (-1,0,0),\\ g_3 &= (-1,-1,\ -2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2\\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 4\\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $0, 5,\ 3$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(0,5,3)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-2,3)$, $B = (3,3)$, $C = (0,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (4,4,5,-2), \quad \boldsymbol{w} = (0,1,1,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,-2,-1,-2), \mathbf{e}_2 = (-2,-1,2,3), \mathbf{e}_3 = (3,2,0,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 2;\\ 3x + 3y + 4z = 3;\\ 4x + 3y + 4z = 4. \end{cases}$$

Вариант 18.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;3;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;1;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;2;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;4;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4;2;4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;3;4). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;0;3;1;4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (0;2;0;1;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;4;2;4;0), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3;1;4;4;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;4;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;1;1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,2),\quad \mathbf{e}_3 = (0,3,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 4x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x, \quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 3, \quad \mathbf{e}_3 = 3$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (3,3,4),\quad \mathbf{e}_2 = (2,2,3),\quad \mathbf{e}_3 = (4,3,4);$$

$$\mathbf{g}_1 = (2,4,2),\quad \mathbf{g}_2 = (4,3,3),\quad \mathbf{g}_3 = (3,4,2).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^2 - 4x + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 2x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 5x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (0,0\ ,-1),\quad v_2 = (1,1,-2),\quad v_3 = (-1,-2,-3),$$

$$w_1 = (2,2,1),\quad w_2 = (4,3,-1),\quad w_3 = (7,8,7).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x+3)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (-2,-2,1), \\ g_2 &= (-3,-3,1), \\ g_3 &= (0,-1,\ -2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $0, 0,\ 3$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = T Diag(0,0,3)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-2,5)$, $B = (1,-1)$, $C = (4,1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (0,2,0,-2),\quad \boldsymbol{w} = (-1,3,1,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (2,-1,-1,0), \mathbf{e}_2 = (2,-1,-1,2), \mathbf{e}_3 = (3,-1,1,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 5; \\ 3x + 4y + 5z = 5; \\ 2x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

Вариант 19.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (3;1;2),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;2;1),\quad \boldsymbol{v}_3 = (3;3;3).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (3;3;2),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;4;4),\quad \boldsymbol{v}_3 = (3;3;3).$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (3;3;3;4;4),\quad \boldsymbol{v}_2 = (1;4;0;1;4),\quad \boldsymbol{v}_3 = (4;0;2;0;4),\quad \boldsymbol{v}_4 = (2;1;4;4;4).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;1;2)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,2).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;-1;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,4),\quad \mathbf{e}_3 = (0,2,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x$, $\mathbf{e}_2 = 2x^2 + 4$, $\mathbf{e}_3 = 2$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (4,3,4),\quad \mathbf{e}_2 = (4,2,2),\quad \mathbf{e}_3 = (4,4,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (4,2,2),\quad \mathbf{g}_2 = (4,4,3),\quad \mathbf{g}_3 = (4,3,4).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = 5x^2 - 3x + 3,\quad \boldsymbol{v}_2 = 2x^2 + 3x + 5,\quad \boldsymbol{v}_3 = 3x^2 + 3x - 3$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 3$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-1, 0, 0),\quad v_2 = (0,-1,-2),\quad v_3 = (0,0,-1),$$

$$w_1 = (2,0,2),\quad w_2 = (7,3,3),\quad w_3 = (3,1,2).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (6x+4)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 2 & -4 & -24 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},\qquad g_1 = (-1,1,0),\quad g_2 = (0,-1,-1),\quad g_3 = (1,-2,\ 0).$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 120 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-1, 5,\ 0$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = T Diag(-1,5,0) T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (3,-2)$, $B = (4,2)$, $C = (5,-2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (1,-2,3,0),\quad \boldsymbol{w} = (5,-2,4,2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,5,0,4), \mathbf{e}_2 = (-2,0,-1,2), \mathbf{e}_3 = (3,-1,0,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 2; \\ 4x + 4y + 4z = 5; \\ 5x + 4y + 2z = 5. \end{cases}$$

Вариант 20.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;1;1),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;3;1),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;1;1). \end{aligned}$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;3;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4;4;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;2;4). \end{aligned}$$
Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;1;1;1;4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (4;1;0;4;1),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;1;2;0;3),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (3;1;4;3;0). \end{aligned}$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;3;0)$ относительно базиса
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,4,0),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,2). \end{aligned}$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (3;3;1)$ относительно базиса
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,0,0),\\ \mathbf{e}_2 &= (0,4,3),\\ \mathbf{e}_3 &= (0,2,3), \end{aligned}$$
если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 2x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 2, \quad \mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,2,4),\\ \mathbf{e}_2 &= (4,2,4),\\ \mathbf{e}_3 &= (2,4,4); \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (4,3,2),\\ \mathbf{g}_2 &= (2,2,2),\\ \mathbf{g}_3 &= (3,2,2). \end{aligned}$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^2 - 2x + 3,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 4x + 2,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^2 + 5x - 5 \end{aligned}$$
базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 3x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.
$$v_1 = (1,1\ ,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (0,0,-1),$$
$$w_1 = (-4,-3,-4), \quad w_2 = (-2,-1,-2), \quad w_3 = (1,-1,\ 0).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 2\\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.
$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (0,1,1),\\ g_2 &= (1,-1,-2),\\ g_3 &= (2,-1,\ -2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3\\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -15 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1, 5,\ 5$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то
$$A_\varphi = TDiag(1,5,5)T^{-1}, \text{ где } T = (v_1 v_2 \ldots v_n).$$

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (2,-1)$, $B = (1,5)$, $C = (0,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.
$$\boldsymbol{v} = (4,2,5,1), \quad \boldsymbol{w} = (-2,-1,5,1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2,5,-2,-1), \mathbf{e}_2 = (5,-1,4,3), \mathbf{e}_3 = (2,3,2,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 2;\\ 3x + 5y + 5z = 4;\\ 2x + 3y + 3z = 3. \end{cases}$$

Вариант 21.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;2;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;1;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;2;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;2;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;4;4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;2;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (0;1;0;4;2), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;0;2;4;1), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;1;4;1;0), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3;0;1;3;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;3;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,3).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;-1;-1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,3),\quad \mathbf{e}_3 = (0,2,3),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 3x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 4x^2 + 3, \quad \mathbf{e}_3 = 2,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,2,4),\quad \mathbf{e}_2 = (4,2,4),\quad \mathbf{e}_3 = (3,2,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (4,4,2),\quad \mathbf{g}_2 = (2,4,2),\quad \mathbf{g}_3 = (4,4,4).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 4x^2 - 3x + 5, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^2 + 3x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 2x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 3x + 2$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-1, -2\ , -1), \quad v_2 = (2,0,1), \quad v_3 = (-1,-1,-1),$$

$$w_1 = (3,4,0), \quad w_2 = (-3,0,1), \quad w_3 = (2,2,0).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (6x+2)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A_φ^e. Найдите матрицу A_φ^g линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (-3,-2,-2), \\ g_2 &= (0,-2,-3), \\ g_3 &= (1,-1,\ -2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-2, 1,\ 4$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-2,1,4)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (0,2)$, $B = (5,2)$, $C = (2,1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-2,0,5,4), \quad \boldsymbol{w} = (3,3,-1,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,5,4,4), \mathbf{e}_2 = (0,1,2,3), \mathbf{e}_3 = (4,1,0,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 4y + 4z = 4; \\ 5x + 3y + 4z = 5; \\ 2x + 3y + 3z = 3. \end{cases}$$

Вариант 22.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;2;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;3;3),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;2;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;3;4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;2;4),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;4;3). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;4;2;0;3),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;4;1;4;4),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;2;3;0;0),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (1;2;0;1;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;2;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (3;-1;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,4),\quad \mathbf{e}_3 = (0,3,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 3x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x$, $\mathbf{e}_2 = 3x^2 + 3$, $\mathbf{e}_3 = 3$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,4,4),\quad \mathbf{e}_2 = (2,4,3),\quad \mathbf{e}_3 = (2,4,4);$$

$$\mathbf{g}_1 = (2,4,2),\quad \mathbf{g}_2 = (2,4,4),\quad \mathbf{g}_3 = (2,2,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 2x + 2,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^2 + 3x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 5x - 4 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 5x^2 + 4x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-1,-2\ ,-1),\quad v_2 = (-2,-1,-1),\quad v_3 = (1,0,0),$$

$$w_1 = (1,2,0),\quad w_2 = (4,-2,-2),\quad w_3 = (-2,2,1\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (2x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 18\\ -3 & 2 & 6\\ -6 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (-2,-2,-1),\\ g_2 &= (-3,-1,1),\\ g_3 &= (0,1,\ 1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -4\\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -4 & 1\\ -10 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-1, 1,\ 2$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-1,1,2)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-1,5)$, $B = (2,-1)$, $C = (5,0)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (1,-2,4,-2),\quad \boldsymbol{w} = (5,-2,-2,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,-1,-1,0), \mathbf{e}_2 = (-2,2,-2,4), \mathbf{e}_3 = (-2,3,0,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 4y + 4z = 4;\\ 4x + 2y + 5z = 5;\\ 3x + 3y + 5z = 5. \end{cases}$$

Вариант 23.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (1;2;3),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;1;3),\quad \boldsymbol{v}_3 = (2;2;1).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (4;2;3),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;4;4),\quad \boldsymbol{v}_3 = (4;3;4).$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (1;4;0;0;4),\quad \boldsymbol{v}_2 = (0;3;2;0;2),\quad \boldsymbol{v}_3 = (4;2;1;3;0),\quad \boldsymbol{v}_4 = (3;1;3;3;3).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;4;-1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,3).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;3;-1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,3),\quad \mathbf{e}_3 = (0,4,3),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 3x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x$, $\mathbf{e}_2 = 4x^2 + 4$, $\mathbf{e}_3 = 3$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,3,4),\quad \mathbf{e}_2 = (3,3,2),\quad \mathbf{e}_3 = (4,4,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,2,2),\quad \mathbf{g}_2 = (4,2,3),\quad \mathbf{g}_3 = (2,3,4).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = 5x^2 - 3x + 5,\quad \boldsymbol{v}_2 = 2x^2 + 3x + 3,\quad \boldsymbol{v}_3 = 3x^2 + 2x - 4$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 4x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-2,-1\ ,0),\quad v_2 = (1,1,1),\quad v_3 = (2,-1,-3),$$

$$w_1 = (4,-2,-2),\quad w_2 = (-3,3,1),\quad w_3 = (0,-5,2\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x+4)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -38 \\ 1 & -2 & -28 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{array}{l} g_1 = (0,-2,-1), \\ g_2 = (-1,-2,-1), \\ g_3 = (-1,\ -1,0). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-1, 3,\ 0$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = T Diag(-1,3,0) T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (0,-1)$, $B = (1,2)$, $C = (2,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-2,2,3,5),\quad \boldsymbol{w} = (-1,4,-1,2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (4,-2,4,0), \mathbf{e}_2 = (-2,-2,2,2), \mathbf{e}_3 = (3,4,4,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 2; \\ 5x + 2y + 3z = 5; \\ 2x + 2y + 4z = 5. \end{cases}$$

Вариант 24.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\boldsymbol{v}_1 = (1;1;2),\quad \boldsymbol{v}_2 = (2;3;1),\quad \boldsymbol{v}_3 = (3;2;2).$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\boldsymbol{v}_1 = (3;3;2),\quad \boldsymbol{v}_2 = (4;2;3),\quad \boldsymbol{v}_3 = (4;4;2).$$
Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора
$$\boldsymbol{v}_1 = (4;4;4;1;0),\quad \boldsymbol{v}_2 = (2;2;1;0;0),\quad \boldsymbol{v}_3 = (0;3;0;2;0),\quad \boldsymbol{v}_4 = (3;1;4;1;2).$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;2;-1)$ относительно базиса
$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,3).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;3;4)$ относительно базиса
$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,3),\quad \mathbf{e}_3 = (0,2,4),$$
если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 4x$, $\mathbf{e}_2 = 4x^2 + 3$, $\mathbf{e}_3 = 2$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$$\mathbf{e}_1 = (2,4,3),\quad \mathbf{e}_2 = (4,2,4),\quad \mathbf{e}_3 = (3,3,4);$$
$$\mathbf{g}_1 = (4,4,2),\quad \mathbf{g}_2 = (3,2,2),\quad \mathbf{g}_3 = (4,3,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы
$$\boldsymbol{v}_1 = 4x^2 - 3x + 5,\quad \boldsymbol{v}_2 = 3x^2 + 4x + 3,\quad \boldsymbol{v}_3 = 2x^2 + 5x - 2$$
базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.
$$v_1 = (-2,1,-1),\quad v_2 = (1,-2,1),\quad v_3 = (0,-2,1),$$
$$w_1 = (1,4,0),\quad w_2 = (-2,-3,-3),\quad w_3 = (-2,-1,-4).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (5x+5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.
$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\qquad g_1 = (1,0,1),\ g_2 = (1,-2,-2),\ g_3 = (-1,1,0).$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-2, 1, 3$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-2,1,3)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (2,1)$, $B = (1,-2)$, $C = (0,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.
$$\boldsymbol{v} = (4,0,5,-2),\quad \boldsymbol{w} = (1,4,0,-1).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-2,-1,2,4), \mathbf{e}_2 = (-2,4,-1,0), \mathbf{e}_3 = (-1,0,0,-1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4x + 3y + 5z = 2; \\ 3x + 4y + 3z = 5; \\ 2x + 5y + 2z = 3. \end{cases}$$

Вариант 25.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;2;3), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;1;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;1;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;3;2), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;2;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;4;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;3;0;0;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (0;0;2;3;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;2;1;1;2), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (4;4;0;2;4). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;2;2)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (3;-1;0)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,3),\quad \mathbf{e}_3 = (0,3,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 4x + 4$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 3x^2 + 2, \quad \mathbf{e}_3 = 3,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,2,2),\quad \mathbf{e}_2 = (2,3,2),\quad \mathbf{e}_3 = (2,4,4);$$

$$\mathbf{g}_1 = (2,3,4),\quad \mathbf{g}_2 = (2,4,3),\quad \mathbf{g}_3 = (2,2,3).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 2x + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 4x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 3x - 5 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 3x + 2$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (-2, 0\ , 1), \quad v_2 = (1, -1, -3), \quad v_3 = (-2, -1, -2),$

$w_1 = (2, 2, -3), \quad w_2 = (3, -2, 6), \quad w_3 = (7, 1, 2\ ).$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x + 2)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ -12 & -7 & 6 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (0,1,-1), \\ g_2 &= (0,2,-1), \\ g_3 &= (1,1,\ 0). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-2, 3,\ 2$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = T Diag(-2,3,2) T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3,3) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (-2,5)$, $B = (3,4)$, $C = (0,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (4,-1,5,4), \quad \boldsymbol{w} = (0,3,0,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (3,0,0,4), \mathbf{e}_2 = (3,0,4,1), \mathbf{e}_3 = (1,0,-2,-1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3z = 3; \\ 3x + 3y + 2z = 4; \\ 4x + 2y + 5z = 2. \end{cases}$$

Вариант 26.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;2;2), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;1;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;3;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;4;4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (4;3;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;3;3). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (0;3;1;4;4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;4;0;1;0), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (2;0;4;3;4), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (1;1;1;3;3). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;4;-1)$ относительно базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,0,0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0,4,0), \\ \mathbf{e}_3 &= (0,0,2). \end{aligned}$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (1;2;3)$ относительно базиса

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,0,0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0,4,4), \\ \mathbf{e}_3 &= (0,2,3), \end{aligned}$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 3x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 2, \quad \mathbf{e}_3 = 4$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (3,3,4), \\ \mathbf{e}_2 &= (4,2,3), \\ \mathbf{e}_3 &= (2,3,2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (4,3,3), \\ \mathbf{g}_2 &= (2,2,2), \\ \mathbf{g}_3 &= (3,3,4). \end{aligned}$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 2x^2 - 3x + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 5x^2 + 4x + 3, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 4x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 3x + 3$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-3,-1\ ,0), \quad v_2 = (-1,0,-2), \quad v_3 = (1,1,-3),$$

$$w_1 = (-5,4,0), \quad w_2 = (3,7,4), \quad w_3 = (9,7,6).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A_φ^e. Найдите матрицу A_φ^g линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (-1,1,-2), \\ g_2 &= (0,0,-1), \\ g_3 &= (-2,1,\ 1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-3, 2,\ 0$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = T Diag(-3,2,0) T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (4,1)$, $B = (-1,2)$, $C = (2,3)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-1,-2,5,0), \quad \boldsymbol{w} = (1,1,1,5).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,3,-2,2), \mathbf{e}_2 = (1,5,1,2), \mathbf{e}_3 = (4,0,-1,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 2; \\ 2x + 3y + 2z = 2; \\ 5x + 4y + 2z = 2. \end{cases}$$

Вариант 27.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (1;1;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;1;3), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;3;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;2;2), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;2;4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;4;3). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;1;0;0;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;3;4;1;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;3;3;2;3), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3;0;2;1;1). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;-1;-1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,3).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (4;-1;2)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,2),\quad \mathbf{e}_3 = (0,2,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 3x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 3x, \quad \mathbf{e}_2 = 4x^2 + 2, \quad \mathbf{e}_3 = 2,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (2,2,3),\quad \mathbf{e}_2 = (3,4,2),\quad \mathbf{e}_3 = (2,2,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,3,2),\quad \mathbf{g}_2 = (2,2,4),\quad \mathbf{g}_3 = (4,4,2).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^2 - 3x + 3, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^2 + 2x + 4, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^2 + 5x - 5 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 5x + 4$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (0,-3\ ,-1),\quad v_2 = (-1,-2,-2),\quad v_3 = (1,-2,1),$$

$$w_1 = (1,-1,2),\quad w_2 = (2,0,0),\quad w_3 = (-1,-1,3\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (5x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (1,1,-2), \\ g_2 &= (0,-2,1), \\ g_3 &= (0,-3,\ 1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-3, 5,\ 5$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-3,5,5)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,5,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (4,-1)$, $B = (5,2)$, $C = (-2,4)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (2,-1,2,1), \quad \boldsymbol{w} = (1,4,-2,0).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (1,-2,-1,4), \mathbf{e}_2 = (-1,5,2,-2), \mathbf{e}_3 = (4,1,2,0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 5y + 4z = 2; \\ 5x + 4y + 5z = 5; \\ 3x + 3y + 2z = 4. \end{cases}$$

Вариант 28.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;2;1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;2;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;1;2). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;2;2), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;4;2), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;4;2). \end{aligned}$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (3;4;0;3;4), \\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;0;4;3;4), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (4;1;3;3;2), \\ \boldsymbol{v}_4 &= (3;0;2;1;0). \end{aligned}$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;-1;4)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,2).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;1;1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,2),\quad \mathbf{e}_3 = (0,4,4),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 4x^2 + 4x + 2$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 4x, \quad \mathbf{e}_2 = 4x^2 + 3, \quad \mathbf{e}_3 = 4,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (3,2,2),\quad \mathbf{e}_2 = (3,4,2),\quad \mathbf{e}_3 = (3,3,3);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,4,4),\quad \mathbf{g}_2 = (3,3,4),\quad \mathbf{g}_3 = (2,2,2).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 3x^2 - 3x + 4, \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2x^2 + 4x + 2, \\ \boldsymbol{v}_3 &= 5x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 2x^2 + 3x + 2$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-2,-3\ ,0),\quad v_2 = (-3,1,1),\quad v_3 = (-2,2,1),$$

$$w_1 = (11,5,1),\quad w_2 = (-2,1,-3),\quad w_3 = (-6,-1,-3\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x+5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} g_1 &= (0,-2,-3), \\ g_2 &= (2,-1,-2), \\ g_3 &= (-1,-1,\ -1). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-3, 3,\ 4$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(-3,3,4)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (5,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,5,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4,4) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (3,4)$, $B = (2,0)$, $C = (1,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (5,-2,2,3),\quad \boldsymbol{w} = (3,1,1,-2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (-1,1,5,1), \mathbf{e}_2 = (-1,1,2,-2), \mathbf{e}_3 = (5,-1,-2,4)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y + 3z = 3; \\ 4x + 4y + 5z = 5; \\ 3x + 4y + 2z = 4. \end{cases}$$

Вариант 29.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (2;1;1),\quad \boldsymbol{v}_2 = (1;1;2),\quad \boldsymbol{v}_3 = (3;3;1).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (2;2;4),\quad \boldsymbol{v}_2 = (4;2;2),\quad \boldsymbol{v}_3 = (3;2;4).$$

Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора

$$\boldsymbol{v}_1 = (0;0;4;3;1),\quad \boldsymbol{v}_2 = (3;3;0;2;3),\quad \boldsymbol{v}_3 = (1;3;4;1;3),\quad \boldsymbol{v}_4 = (4;3;3;0;0).$$

Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;0;-1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,3,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (0;3;1)$ относительно базиса

$$\mathbf{e}_1 = (3,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,2),\quad \mathbf{e}_3 = (0,2,2),$$

если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 3x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 2x$, $\mathbf{e}_2 = 4x^2 + 2$, $\mathbf{e}_3 = 3$, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов

$$\mathbf{e}_1 = (3,3,2),\quad \mathbf{e}_2 = (4,2,2),\quad \mathbf{e}_3 = (2,2,4);$$

$$\mathbf{g}_1 = (3,4,4),\quad \mathbf{g}_2 = (4,3,4),\quad \mathbf{g}_3 = (2,2,4).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы

$$\boldsymbol{v}_1 = 5x^2 - 2x + 3,\quad \boldsymbol{v}_2 = 2x^2 + 4x + 2,\quad \boldsymbol{v}_3 = 3x^2 + 2x - 4$$

базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 4x + 5$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (-1,-1,-2)$, $v_2 = (-2,-1,-1)$, $v_3 = (-2,-1,0)$,

$w_1 = (-2,0,-1)$, $w_2 = (-3,-1,-2)$, $w_3 = (-3,-2,-2)$.

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (2x+4)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A_φ^e. Найдите матрицу A_φ^g линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{aligned} g_1 &= (1,1,1), \\ g_2 &= (0,0,1), \\ g_3 &= (-1,0,-2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & -14 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $0, 2, 1$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = T Diag(0,2,1) T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (4,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,3,5)$, $\boldsymbol{v}_2 = (3,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (0,1)$, $B = (5,0)$, $C = (2,-2)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v} = (-1,-1,2,5),\quad \boldsymbol{w} = (-1,3,-1,5).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (5,5,2,4), \mathbf{e}_2 = (0,1,4,-2), \mathbf{e}_3 = (1,5,1,0)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y + 5z = 3; \\ 2x + 5y + 3z = 4; \\ 3x + 3y + 2z = 2. \end{cases}$$

Вариант 30.

Векторные пространства

1. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (2;3;2),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (3;3;2),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (1;3;1). \end{aligned}$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ линейно независимыми?

2. В $\mathbb{R}^3$ даны три вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4;3;2),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (2;3;4),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;3;4). \end{aligned}$$
Является ли система $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ базисом $\mathbb{R}^3$?

3. В $\mathbb{R}^5$ даны четыре вектора
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= (4;2;1;1;4),\\ \boldsymbol{v}_2 &= (1;1;2;4;1),\\ \boldsymbol{v}_3 &= (3;0;1;2;0),\\ \boldsymbol{v}_4 &= (0;4;2;3;4). \end{aligned}$$
Являются ли векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ линейно независимыми?

4. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (-1;4;-1)$ относительно базиса
$$\mathbf{e}_1 = (4,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,2,0),\quad \mathbf{e}_3 = (0,0,4).$$

5. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = (2;3;0)$ относительно базиса
$$\mathbf{e}_1 = (2,0,0),\quad \mathbf{e}_2 = (0,4,2),\quad \mathbf{e}_3 = (0,3,2),$$
если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}^3$.

6. Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 3$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = 4x, \quad \mathbf{e}_2 = 2x^2 + 4, \quad \mathbf{e}_3 = 3,$ если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ составляют базис $\mathbb{R}_2[x]$.

7. В $\mathbb{R}^3$ даны два семейства векторов
$$\mathbf{e}_1 = (3,3,4),\quad \mathbf{e}_2 = (2,3,3),\quad \mathbf{e}_3 = (3,3,2);$$
$$\mathbf{g}_1 = (4,3,3),\quad \mathbf{g}_2 = (3,2,2),\quad \mathbf{g}_3 = (2,2,4).$$

а) Проверить являются ли эти семейства векторов базисами $\mathbb{R}^3$.

б) Если нет, то изменениями этих векторов добейтесь линейной независимости.

в) Найдите матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$.

8. а) Составляют ли векторы
$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= 5x^2 - 5x + 4,\\ \boldsymbol{v}_2 &= 4x^2 + 5x + 3,\\ \boldsymbol{v}_3 &= 3x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$
базис пространства $\mathbb{R}_2[x]$?

б) Если векторы $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ не составляют базис, то поменяйте векторы так, чтобы эти векторы были линейно независимы.

в) Найдите координаты вектора $\boldsymbol{v} = 3x^2 + 2x + 2$ относительно базиса $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.
$$v_1 = (1,-1\ ,1),\quad v_2 = (-1,1,0),\quad v_3 = (1,0,1),$$
$$w_1 = (-1,-1,-5),\quad w_2 = (0,1,3),\quad w_3 = (-4,1,-3\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (5x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей
$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 18\\ -3 & 2 & 6\\ -6 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A_φ^e. Найдите матрицу A_φ^g линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.
$$A_\varphi^e = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},\qquad \begin{aligned} g_1 &= (-1,0,-1),\\ g_2 &= (1,1,1),\\ g_3 &= (1,-1,\ 2). \end{aligned}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 0\\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -6\\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1, 3,\ 4$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(1,3,4)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (3,4)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,4) \in \mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1 = (5,4,3)$, $\boldsymbol{v}_2 = (4,3,5) \in \mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A = (4,5)$, $B = (-1,5)$, $C = (2,5)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.
$$\boldsymbol{v} = (-2,-2,-1,-2),\quad \boldsymbol{w} = (-2,3,1,2).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1 = (0,-2,4,0), \mathbf{e}_2 = (5,-2,2,5), \mathbf{e}_3 = (5,5,-1,3)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортогонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4;\\ 5x + 4y + 3z = 4;\\ 4x + 4y + 3z = 4. \end{cases}$$

Вариант 31.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1)=w_1$, $\varphi(v_2)=w_2$, $\varphi(v_3)=w_3$.

$$v_1=(1,0\ ,0),\quad v_2=(1,0,-1),\quad v_3=(1,-1,2),$$

$$w_1=(-3,1,0),\quad w_2=(-4,1,0),\quad w_3=(1,3,1\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1,x,x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x))=(3x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 6 & 5 & -3\\ 14 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1,g_2,g_3.

$$A^e_\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 1 & -3 & -1\\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} g_1=(-2,1,-2),\\ g_2=(2,2,-3),\\ g_3=(-3,1,\ -2). \end{matrix}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi=\begin{pmatrix} 3 & 15\\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1,5,\ 5$ и соответствующими векторами v_1,v_2,v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1)=\lambda_1v_1,\dots,\ \varphi(v_n)=\lambda_nv_n$, то $A_\varphi=TDiag(1,5,5)T^{-1}$, где $T=(v_1v_2\dots v_n)$.

Евклидовы пространства

1. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1=(5,3)$, $\boldsymbol{v}_2=(5,3)\in\mathbb{R}^2$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

2. Даны векторы $\boldsymbol{v}_1=(4,3,3)$, $\boldsymbol{v}_2=(4,3,4)\in\mathbb{R}^3$. Найти их длины (нормы) и косинус угла между ними.

3. Даны вершины $A=(2,5)$, $B=(3,-1)$, $C=(4,1)$. Найти длины сторон треугольника ABC. Найти косинус каждого угла треугольника.

5. Найти проекцию вектора v на w.

$$\boldsymbol{v}=(0,1,4,5),\quad \boldsymbol{w}=(3,3,5,3).$$

6. В $\mathbb{E}^4$ даны три вектора $\mathbf{e}_1=(-1,5,-2,1), \mathbf{e}_2=(-1,4,3,0), \mathbf{e}_3=(1,3,-1,1)$. Изменениями координат добиться того, что $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ — базис в $\mathbb{E}^4$. Ортоногонализовать методом Грамма-Шмидта данный базис.

Системы линейных уравнений

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+3z=2;\\ 4x+3y+3z=5;\\ 5x+5y+3z=4. \end{cases}$$

Вариант 32.

Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1)=w_1$, $\varphi(v_2)=w_2$, $\varphi(v_3)=w_3$.

$$v_1=(-1,0\ ,0),\quad v_2=(1,-2,1),\quad v_3=(2,-3,1),$$

$$w_1=(-1,1,-1),\quad w_2=(3,-6,-1),\quad w_3=(5,-9,-1\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1,x,x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x))=(6x+6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & -4\\ -12 & 13 & 12\\ 14 & -14 & -13 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1,g_2,g_3.

$$A^e_\varphi=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{matrix} g_1=(1,1,0),\\ g_2=(-3,-3,-1),\\ g_3=(0,-1,\ -2). \end{matrix}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi=\begin{pmatrix} -1 & -8\\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-3,4,\ 5$ и соответствующими векторами v_1,v_2,v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1)=\lambda_1v_1,\dots,\ \varphi(v_n)=\lambda_nv_n$, то $A_\varphi=TDiag(-3,4,5)T^{-1}$, где $T=(v_1v_2\dots v_n)$.

Вариант 12

{ { 1,-2,1} ,{ 4,-9,8} ,{ 5,-12,11} }

{ { 3,1,1} ,{ { 2,-6,7} ,{ 1,0,1} ,{ 1,1,0} } }

{ { -3,-9,-11} ,{ 0,7,6} ,{ 0,-1,2} }

Вариант 33.
Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (1, -2\ , 1), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 0, 0),$$

$$w_1 = (7, -6, 1), \quad w_2 = (-2, 1, 0), \quad w_3 = (1, -1, 0\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x + 3)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -17 & -35 & -25 \\ 5 & 11 & 7 \\ 5 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1 = (2, 0, -1), \\ g_2 = (-1, -1, -2), \\ g_3 = (-1, 0,\ 0). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-2, 5,\ 1$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то

$$A_\varphi = TDiag(-2, 5, 1)T^{-1}, \text{ где } T = (v_1 v_2 \ldots v_n).$$

Вариант 34.
Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-2, -2\ , 1), \quad v_2 = (-2, -1, -2), \quad v_3 = (-1, -1, 0),$$

$$w_1 = (4, 1, 1), \quad w_2 = (2, 10, -3), \quad w_3 = (2, 2, 0\ ).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x + 3)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1 = (-1, 0, -2), \\ g_2 = (0, 1, -2), \\ g_3 = (-3, -2,\ -1). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1, 1,\ 2$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то

$$A_\varphi = TDiag(1, 1, 2)T^{-1}, \text{ где } T = (v_1 v_2 \ldots v_n).$$

Вариант 13

{ { 1,-4,6} ,{ 0,1,-2} ,{ 0,-1,1} }
{ { 3,-2,2} ,{ { -3,1,1} ,{ -4,1,1} ,{ -5,2,1} } }
{ { 1,0,-3} ,{ 0,5,14} ,{ 0,0,-2} }

Вариант 14

{ { -5,-3,12} ,{ 13,8,-44} ,{ 0,0,-2} }
{ { 4,2,2} ,{ { 0,1,1} ,{ 2,0,1} ,{ -1,1,0} } }
{ { -4,6,2} ,{ -5,7,2} ,{ 0,0,1} }

Вариант 35.
Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (-1, 0\ , 1), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (1, 0, -2),$

$w_1 = (0, 1, -4), \quad w_2 = (1, 3, -2), \quad w_3 = (0, -2, 7\ ).$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (6x + 5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -9 & 54 & -26 \\ 4 & -11 & 8 \\ 9 & -39 & 22 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1 = (0, -1, -1), \\ g_2 = (1, -1, 0), \\ g_3 = (0, 1,\ 0). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1, 0,\ 2$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(1, 0, 2)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Вариант 36.
Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (-3, 0\ , 1), \quad v_2 = (-1, 1, 0), \quad v_3 = (1, -2, 0),$

$w_1 = (0, -2, -4), \quad w_2 = (1, 1, -2), \quad w_3 = (-2, -2, 3\ ).$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (2x + 3)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 13 & 24 & 0 \\ -8 & -15 & 0 \\ -44 & -102 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1 = (0, 0, -1), \\ g_2 = (0, -1, 1), \\ g_3 = (1, 0,\ 1). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1, 0,\ 1$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(1, 0, 1)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Вариант 15

{ { 1,-1,2} ,{ -9,-3,-5} ,{ -1,2,-3} }
{ { 4,-3,1} ,{ { -2,0,1} ,{ -4,1,3} ,{ -5,1,4} } }
{ { 0,-1,-1} ,{ 0,0,0} ,{ 2,5,3} }

Вариант 16

{ { -4,26,14} ,{ -2,9,4} ,{ 3,-12,-5} }
{ { -3,3,1} ,{ { -3,2,12} ,{ 0,0,1} ,{ -2,1,7} } }
{ { -1,-1,-6} ,{ 2,2,6} ,{ 0,0,1} }

Вариант 37.
Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (0, 1\ , 1)$, $\quad v_2 = (-2, 0, -1)$, $\quad v_3 = (-1, -1, -1)$,

$w_1 = (0, -2, -1)$, $\quad w_2 = (6, 4, -2)$, $\quad w_3 = (2, 3, 0\ )$.

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x + 5)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1 = (-1, -1, -1), \\ g_2 = (-1, 0, 0), \\ g_3 = (-1, -1,\ -2). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $0, 5,\ 3$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(0, 5, 3)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Вариант 38.
Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$v_1 = (0, 0\ , -1)$, $\quad v_2 = (1, 1, -2)$, $\quad v_3 = (-1, -2, -3)$,

$w_1 = (2, 2, 1)$, $\quad w_2 = (4, 3, -1)$, $\quad w_3 = (7, 8, 7)$.

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (4x + 3)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 12 & -4 \\ -4 & -11 & 4 \\ -4 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} g_1 = (-2, -2, 1), \\ g_2 = (-3, -3, 1), \\ g_3 = (0, -1,\ -2). \end{array}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $0, 0,\ 3$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то $A_\varphi = TDiag(0, 0, 3)T^{-1}$, где $T = (v_1 v_2 \ldots v_n)$.

Вариант 17

{ { 0,-1,2} ,{ -14,6,-18} ,{ -5,3,-8} }
{ { 4,1,1} ,{ { 1,1,0} ,{ -1,0,1} ,{ 1,2,0} } }
{ { 3,-4,4} ,{ 3,6,-6} ,{ 3,1,-1} }

Вариант 18

{ { -5,2,0} ,{ -12,5,1} ,{ -16,6,-1} }
{ { -3,1,1} ,{ { -1,1,1} ,{ 1,0,1} ,{ -3,1,0} } }
{ { -3,3,0} ,{ -6,6,0} ,{ -9,9,0} }

Вариант 39.
Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (-1, 0\ , 0), \quad v_2 = (0, -1, -2), \quad v_3 = (0, 0, -1),$$

$$w_1 = (2, 0, 2), \quad w_2 = (7, 3, 3), \quad w_3 = (3, 1, 2).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (6x + 4)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 2 & -4 & -24 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g_1 = (-1, 1, 0), \\ g_2 = (0, -1, -1), \\ g_3 = (1, -2,\ 0). \end{matrix}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $-1, 5,\ 0$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то

$$A_\varphi = T Diag(-1, 5, 0)T^{-1}, \text{ где } T = (v_1 v_2 \dots v_n).$$

Вариант 40.
Линейные преобразования

1. Найдите линейное преобразование φ такое, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$.

$$v_1 = (1, 1\ , 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, -1),$$

$$w_1 = (-4, -3, -4), \quad w_2 = (-2, -1, -2), \quad w_3 = (1, -1,\ 0).$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x + 6)P'(x)$.

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

5. Пусть линейное преобразование φ в стандартном базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A^e_φ. Найдите матрицу A^g_φ линейного преобразования φ в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A^e_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} g_1 = (0, 1, 1), \\ g_2 = (1, -1, -2), \\ g_3 = (2, -1,\ -2). \end{matrix}$$

6. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

7. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 2.

8. Приведите к жордановой форме матрицу A_φ линейного преобразования φ из задачи 3.

9. Приведите к жордановой форме матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Укажите линейное преобразование с собственными числами $1, 5,\ 5$ и соответствующими векторами v_1, v_2, v_3 из задачи 1.

Указание. Если $\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots,\ \varphi(v_n) = \lambda_n v_n$, то

$$A_\varphi = T Diag(1, 5, 5)T^{-1}, \text{ где } T = (v_1 v_2 \dots v_n).$$

Вариант 19

{ { -2,0,-2} ,{ -7,-3,3} ,{ -3,-1,0} }

{ { 3,2,1} ,{ { -2,-4,1} ,{ -3,-5,1} ,{ -3,-6,1} } }

{ { -1,0,0} ,{ 0,5,0} ,{ 0,10,0} }

Вариант 20

{ { -4,1,4} ,{ -2,1,2} ,{ 1,-2,0} }

{ { 5,-3,3} ,{ { 0,1,2} ,{ -1,1,1} ,{ 0,1,1} } }

{ { 1,0,0} ,{ -4,5,0} ,{ 0,0,5} }