Олимпиада ИМИ ЯГУ
по аналитической геометрии

1 Найдите расстояние от точки $(1; 2)$ до отрезка AB, где $A(1; -1)$ и $B(-3; 2)$ (расстояние между множествами Ω и Ψ — наименьшее расстояние AB, где $A \in \Omega$ и $B \in \Psi$).

2 Одна из вершин куба и центры ее граней, не содержащие эту вершину, служат вершинами правильной пирамиды. Найдите площадь основания пирамиды, если ребро куба имеет длину 1.

3 Докажите, что уравнение $y = 1/x$ задает гиперболу, и найдите ее фокусы.

4 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC апофема касается вписанной в пирамиду сферы в точке M, а продолжение этой апофемы пересекает описанную около пирамиды сферу в точке N. Найти радиус вписанной сферы, если $SM = MN = 6\sqrt{2}$.

5 Можно ли тремя эллипсами $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ покрыть прямоугольник 4×6.

Олимпиада ИМИ ЯГУ
Решения

1 Расстояние от точки $C(1;2)$ до $A(1;-1)$ равно $\sqrt{(1-1)^2+(-1-2)^2}=3$, до $B(-3;2)$ — 4. Найдем прямую, проходящую через A и B: $\dfrac{x-1}{1-(-3)}=\dfrac{y-(-1)}{-1-2}\Leftrightarrow -3x+3=4y+4\Leftrightarrow 3x+4y+1=0$. Расстояние от $(1;2)$ до прямой AB равно $\dfrac{|3\cdot1+4\cdot2+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2,4$.

Теперь, нужно показать, что основание высоты на прямую $3x+4y+1=0$ принадлежит отрезку AB.

Это можно сделать разными способами:

1) вычисляя угол $\angle ACB=90^\circ$.

2) найдем прямую $4x-3y+2=0$

1) проверкой углов: $\angle CBA$ и $\angle CAB$ — острые.

Ответ: 2,4.

7 баллов — правильный ответ и правильное решение.

4 баллов — правильный ответ, и решение имеет следующую схему: 1) найдено расстояние до прямой и это объявлено расстоянием до отрезка 2) не доказано, что высота падает на прямую именно в точке отрезка.

1 балл — правильный ответ и решение не приведено.

0 баллов — не правильный ответ.

2 Рассмотрим сечение куба плоскостью, параллельное произвольной грани и проходящее через центры соседних граней — квадрат. Длина отрезка, соединяющего середины соседних граней куба, вдвое короче диагонали квадрата, т.е. имеет длину $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, мы должны найти площадь равностороннего треугольника со сторонами длины $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Высота равностороннего треугольника со стороной $\frac{\sqrt{2}}{2}$ равна $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. Искомая площадь равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

7 баллов — правильный ответ и правильное решение.

0 баллов — не правильный ответ.

3 Очевидно, что все (x,y) такие, что $y=1/x$, удовлетворяют уравнению $xy=1$. Верно и обратное, поскольку $x\neq0$ (иначе $xy=0$.) Следовательно, эти уравнения эквивалентны, что означает равенство множества решений. Уравнение $xy-1=0$ задает кривую второго порядка. Поскольку эта кривая имеет две асимптоты $x=0$ и $y=0$, то это — гипербола.

Легко догадаться, что данная гипербола имеет каноническую систему, получаемую поворотом данной системы координат на 45°. Приведем связи между координатами:

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y',\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

В новой системе координат гипербола имеет вид:

$$\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\Big)\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\Big)=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1.$$

Далее, используя, $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ выводим, что $F_1(-2;0)$ и $F_2(2;0)$. В старой системе координат $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$ и $F_2(\sqrt{2};\sqrt{2})$.

1 баллов — есть идея приведения уравнения к виду $xy-1=0$.

2 баллов — есть идея приведения уравнения к виду $xy-1=0$ и правильно найдены фокусы.

0 баллов — нет доказательства.

4

5 Четыре точки $(\pm2;\pm1)$ лежат на эллипсе. Следовательно, прямоугольник 2×4 с такими вершинами покрывается эллипсом. Три прямоугольника 2×4 покрывают прямоугольник 6×4. Таким образом, три данных эллипса покрывают прямоугольник 4×6.

7 баллов — полностью доказано утверждение.

0 баллов — возможны правильные ответы, но нет доказательства.