Экзаменационные вопросы по "Алгебре"
ИНФ-09. 2 курс, 3 семестр. *http://yktmath.narod.ru*

1. Аксиомы векторного пространства. Векторное пространство $\mathbb{R}^n$.

2. Аксиомы векторного пространства. Векторное пространство $\mathbb{R}^n[x]$.

3. Аксиомы векторного пространства. Векторное пространство векторов на плоскости.

4. Линейная комбинация векторов. Тривиальная комбинация векторов. Линейно независимая система векторов.

5. Линейная комбинация векторов. Нетривиальная комбинация векторов. Линейно зависимая система векторов.

6. Связь между линейной зависимостью системы векторов и рангом матрицы, составленной из векторов.

7. Базис векторного пространства. Примеры базисов $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n[x]$.

8. Размерность векторного пространства.

9. Координаты вектора. Представление вектора в виде линейной комбинации векторов.

10. Формула замены координат при переходе от одного базиса к другому.

11. Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство.

12. Длина вектора и расстояние между точками.

13. Угол между векторами и косинус угла между векторами.

14. Перпендикуряные векторы и критерий перпендикулярности векторов.

15. Ортонормированный базис.

16. Ортогонализация векторов Грамма-Шмидта.

17. Проекция вектора на вектор.

18. Линейные преобразования (линейные операторы). Примеры.

19. Теорема о задании линейного преобразования матрицей. Примеры.

20. Примеры линейных преобразований $\mathbb{R}^n[x]$ и задание таких преобразований с помощью матрицы.

21. Собственное число и собственный вектор.

22. Теорема о характеристическом многочлене.

23. Жорданова форма матрицы.

24. Примеры линейных преобразований – растяжений, сдвигов и поворотов.

Каждый билет содержит две задачи и один теоретический вопрос.

1 Векторное пространство

1.1 Аксиомы векторного пространства

Векторное пространство — это множество V, на котором введены операции сложения векторов и умножения на скаляр. При этом выполнены следующие условия:

1) $v + w = w + v$ для любых $v, w \in V$ (коммутативность сложения);

2) $v + (w + u) = (v + w) + u$ для любых $u, v, w \in V$ (ассоциативность сложения);

3) существует такой элемент $\vec{0}$, что для любого $v \in V$ выполнено $v + \vec{0} = \vec{0} + v = v$ (существование нейтрального элемента относительно сложения);

4) для любого $v \in V$ существует такой элемент $w \in V$, что $v + w = w + v = \vec{0}$ (существование противоположного элемента).

5) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ для любых $v \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ассоциативность умножения на скаляр);

6) $1v = v$ для любых $v \in V$ (умножение на единицу сохраняет вектор).

7) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ для любых $v \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения скаляров);

8) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ для любых $v, w \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения на скаляр относительно сложения векторов).

Замечание. В курсе алгебры векторы не выделяются стрелкой сверху.

Примеры векторных пространств: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $C[a, b]$.

Вопросы и задачи на закрепление

1. Докажите, что множество $\mathbb{R}^n$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством. Элементами этого пространства являются упорядоченные n действительных чисел: $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Сумма двух векторов и произведение на скаляр определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, \ldots, v_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n); \\ \lambda \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) &= (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n). \end{aligned}$$

2. Докажите, что множество $\mathbb{R}^n[x]$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством. Элементами $\mathbb{R}^n[x]$ являются многочлены $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ со степенями не выше n с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Операции на $\mathbb{R}^n[x]$ — обычные операции сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число.

3. Докажите, что множество функций $\alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma \sin x$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ с операциями сложения и умножения на число является векторным пространством. Операции здесь — обычные операции сложения функций и умножения функции на действительное числа.

4. Покажите, что множество функций $\alpha^2 x + \beta x^3 + \gamma \sin x$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ с операциями сложения и умножения на число не является векторным пространством. Операции здесь — обычные операции сложения функций и умножения функции на действительное числа.

Лемма 1 *Кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ является векторными пространством.*

1.2 Линейно зависимая и независимая система векторов

Определение 1 *Системой векторов называется называется упорядоченное множество векторов.*

Выражение вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

называется линейной комбинацией *системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Линейная комбинация векторов называется тривиальной, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ такая, что*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

только в тривиальном случае, называется линейно независимой.

Определение 2 *Системы векторов, которые не являются линейно независимыми называются* ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫМИ*, т.е. это системы векторов такие, что*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

в некотором не тривиальном случае.

Приведем способ, с помощью которого легко определить линейную зависимость произвольной системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Определение 3 *Если матрица A элментарными преобразованиями приведена к ступенчатому виду B, то* РАНГОМ МАТРИЦЫ *A называется количество ненулевых строк B. Ранг матрицы A обозначается через* $\operatorname{rang} A$.

Теорема 1 (Критерий линейной зависимости векторов) *Составим из координат векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матрицу A.*

Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно независимы, если и только если $\operatorname{rang} A$ *является максимальным, т.е.* $\operatorname{rang} A = n$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ НА ЗАКРЕПЛЕНИЕ

1. Определите линейную зависимость векторов $v = (2, -4), \quad w = (3, -6)$.

2. Определите линейную зависимость векторов $v = 1 + x^2, \quad w = 3 - x^2$.

3. Определите линейную зависимость векторов $v = (1, 2, 3), w = (4, 5, 6), u = (7, 8, 9)$.

4. Определите линейную зависимость векторов $v = (1, 0, 1), w = (0, 1, 0), u = (-1, 1, -1)$.

5. Найдите ранг каждой матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение 4 *Если вектор w равен некоторой линейной комбинации системы векторов v_1, v_2, …, v_n, то говорят "w линейно выражается через v_1, v_2, …, v_n".*

Если некоторая нетривиальная линейная комбинация векторов v_1, v_2, …, v_n равна нулевому вектору, то эта система векторов называется линейно зависимой.

Определение линейной незвасимости можно переформулировать следующим образом:

Система векторов называется линейно независимой, если линейная комбинация системы векторов равна нулевому вектору только в тривиальном случае.

Система векторов называется линейно независимой, если все нетривиальные ее линейные комбинации системы векторов не равны нулевому вектору.

Лемма 2 *Система векторов линейно зависима если и только если хотя бы один вектор из этой системы линейно выражается через остальные.*

Координаты вектора

Определение 5 *Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ называется базисом векторного пространства V, если*

1) $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ — линейно независима;

2) каждый вектор V линейно выражается через векторы этой системы векторов.

Размерностью векторного пространства V называется количество векторов в его базисе.

Заметим, что размерность пространства не зависит от выбора базиса.

Определение 6 *Линейно независимую систему векторов в векторном пространстве V, которую нельзя дополнить до линейно независимого, называют* БАЗИСОМ *V. Количество векторов базиса называется* РАЗМЕРНОСТЬЮ *векторного пространства V.*

Рассмотрим произвольную невырожденную квадратную матрицу $n \times n$. Строки этой матрицы составляют базис $\mathbb{R}^n$. Пример $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Пример базиса в $\mathbb{R}^n[x]$ — 1, x, x^2, $\ldots$, x^n.

Вопросы и задачи на закрепление

1. Постройте пример базиса $\mathbb{R}^3[x]$. Укажите размерность $\mathbb{R}^3[x]$.

2. Постройте пример базиса в векторном пространстве функций вида $\alpha \cos x + \beta x + \gamma e^x$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Укажите размерность этого пространства.

3. Постройте пример векторного пространства размерности 4.

4. Почему строки любой матрицы $n \times n$ составляют базис пространства $\mathbb{R}^n$?

5*. (* – означает *сложная задача*). Докажите, что для любых векторных пространств V и U размерности n можно построить взаимнооднозначное соответствие f между всеми ее элементами (биекция) такую, что для любых $v, w \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $f(v + w) = f(v) + f(w)$ и $f(\alpha v) = \alpha f(v)$. Такие отображения называются биекциями.

Определение 7 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — базис векторного пространства V. Тогда любой вектор v можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется КООРДИНАТАМИ *вектора v.*

Координаты вектор всегда определяются относительно некоторого базиса. При работе с несколькими базисами мы будем писать $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_e$, что означает $v = e_1\alpha_1 + \ldots + e_n\alpha_n$.

Лемма 3 (Об единственности координат) *Каждый вектор имеет единственный набор координат.*

Вопросы и задачи на закрепление

1. Найдите координаты вектора $(2, 0, 4)$ в базисе $(2, 2, 3), (2, 1, 1), (6, 2, 2)$.

2. Найдите координаты вектора $(1, 2, -2)$ в базисе $(1, 1, 1), (1, 2, -1), (1, 2, 0)$.

3. Найдите координаты вектора $1 + 2x - 3x^2$ в базисе $1, x, x^2$.

4. Найдите координаты вектора $4 - 2 + 2x^2$ в базисе $1 - x, 1 + x, 1 + x^2$.

5. Может ли существовать вектор с двумя различными наборами координат?

6. Каждый ли вектор имеет координаты?

7. Покажите, что нахождение координаты вектора по заданному базису в $\mathbb{R}^n$ и решение системы линейных уравнений с n неизвестными и n уравнениями – это эквивалентные задачи.

1.3 Замена координат при переходе от одного базиса к другому

Пусть дан "старый" базис e_1, e_2, e_3 в $\mathbb{R}^3$. Определим "новый" базис g_1, g_2, g_3 в $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} g_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3; \\ g_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3; \\ g_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3. \end{aligned}$$

Найдем зависимость между координатами $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_e$ и $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3)_g$.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad a = \alpha'_1 g_1 + \alpha'_2 g_2 + \alpha'_3 g_3.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису g_1, g_2, g_3.

Лемма 4 (О матрице перехода от базиса к базису в $\mathbb{R}^3$) *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ даны два базиса*

$$\begin{aligned} a &= (a_1, a_2, a_3), \qquad & p &= (p_1, p_2, p_3), \\ b &= (b_1, b_2, b_3), \qquad & q &= (q_1, q_2, q_3), \\ c &= (c_1, c_2, c_3), \qquad & r &= (r_1, r_2, r_3). \end{aligned}$$

Тогда матрица перехода от координат базиса a, b, c к координатам базиса p, q, r равна

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

◀ Пусть произвольный вектор v имеет координаты $(v_1, v_2, v_3)_{abc}$ относительно базиса a, b, c и координаты $(w_1, w_2, w_3)_{pqr}$ относительно базиса p, q, r.

По определению координат $v = v_1 a + v_2 b + v_3 c$ и $v = w_1 p + w_2 q + w_3 r$.

С одной стороны выпишем координаты v в стандартном базисе

$$v = v_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 \\ v_1 a_2 \\ v_1 a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 b_1 \\ v_2 b_2 \\ v_2 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_3 c_1 \\ v_3 c_2 \\ v_3 c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 + v_2 b_1 + v_3 c_1 \\ v_1 a_2 + v_2 b_2 + v_3 c_2 \\ v_1 a_3 + v_2 b_3 + v_3 c_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, v имеет следующие координаты в стандартном базисе

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица, составленная из координат линейно независимых векторов **имеет максимальный ранг**. Следовательно,

▶

1.4 Линейная оболочка векторов

Множество всех линейных комбинаций вида $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ "пробегают" $\mathbb{R}$, называется линейной оболочкой векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Обозначается $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Иногда $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ называется векторным пространством, натянутым на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Лемма 5 *Для любой системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейная оболочка $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ является векторным пространством.*

Вопросы и задачи на закрепление

1. Найдите матрицу перехода координат от базиса $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ к базису $(4,2,3)$, $(2,2,4)$, $(3,0,1)$.

2. Найдите матрицу перехода координат от базиса $(2,2,3), (2,1,1), (6,2,2)$ к базису $(1,1,1)$, $(1,2,-1)$, $(1,2,0)$.

3. Может ли матрица перехода от базиса к базису быть вырожденной?

1.5 Изоморфизмы векторных пространств

Определение 8 *Отображение $f : V \to W$ называется биекцией, если оно*

1) взаимно однозначно ($f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$);

2) всюду определено на V (для любого $v \in V$ существует $f(v)$);

3) отображает "на" W (для любого $w \in W$ существует $v \in V$ такое, что $w = f(v)$);

Биекция $f : V \to W$ между векторными пространствами называется изоморфизмом векторных пространств, если она сохраняет оперции, т.е. для любых $v, u \in V$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$

4) $f(v +_V u) = f(v) +_W f(w)$;

5) $f(\alpha \cdot_V v) = \alpha \cdot_W f(v)$.

Здесь "$+_V$"операция сложения векторов, "$\cdot_V$"умножения вектора на число в пространстве V; "$+_W$"операция сложения векторов, "$\cdot_W$"умножения вектора на число в W.

Если существует изоморфизм между V и W, то векторные пространства V и W называются изоморфными. Обозначается через $V \cong W$.

Поскольку композиция биекций является биекцией, то $U \cong V$ и $V \cong W$, то $U \cong W$.

Теорема 2 (Об изоморфности n-мерных пространств) *Каждое векторное пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

1.6 Векторное подпространство

Определение 9 *Пусть W подмножество векторного пространства V является векторным пространством. Такие подмножества W называются векторными подпространствами V.*

Теорема 3 (Критерий подпространства) *Пусть V — произвольное векторное пространство и $W \subseteq V$ некоторое его подмножество.*

Тогда W является векторным подпространством W если и только если выполнены все следующие три условия

1) для любых $v, w \in W$ сумма $v + w \in W$;

2) для любого $w \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ произведение $\lambda w \in W$;

3) $\vec{O} \in W$.

Лемма 6 *Пусть V — векторное пространство. Подмножество $W \subset V$ является векторным подпространством V тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) для любых векторов $v, u \in W$ верно $v + w \in V$;

2) для любого вектора $v \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $\lambda v \in V$.

◁ Была доказана только половина утверждения: если два условия выполнены, то W — векторное подпространство V. Для этого достаточно проверить все аксиомы векторного пространства ▷

Примеры:

$W = \langle 1, x\rangle$ подпространство $\mathbb{R}_3[x]$.

Теорема 4 *Пусть A — $m \times n$-матрица, $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Тогда множество всех решений однородной системы уравнений $Av = 0$ является векторным подпространством $\mathbb{R}^n$ размерности $n - \operatorname{rang} A$.

Определение 10 *Пусть v_0 — вектор, L — линейное подпространство V.*

Множество

$$\{v_0 + w \mid w \in L\}$$

называется линейным многообразием с вектором сдвига v_0 и направляющим пространством L.

Его размерностью называется размерность $\dim L$.

Определение 11 *Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис пространства ее решений.*

Теорема 5 *Пусть v_0 — частное решение системы уравнений $Av = b$ и L — пространство решений однородной системы линейных уравнений $Av = \vec{O}$.*

Тогда множество всех решений неоднородной системы уравнений $Av = b$ является линейным многообразием (x_0, L).

1.7 Суммирование и пересечение векторных подпространств

Определение 12 *Пусть $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_r\rangle$ и $W = \langle w_1, w_2, \dots, w_s\rangle$ векторные подпространства векторного пространства V.*

Пересечением подпространств U и W называется подпространство

$$U \cap W = \{u \mid u \in U, w \in W\}.$$

Суммой подпространств U и W называется подпространство

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Сумма подрпространств называется прямой, если их пересечение имеет размерность 0. Обозначается через $U \oplus W$.

Ортогональным дополнением к подространству U пространства $\mathbb{R}^n$ называется

$$U^{\perp} = \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \mid u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n, \text{ для всех } (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U\}.$$

Теорема 6 *Пусть $U = \langle v_1, v_2, \dots v_k\rangle$. Тогда $U^{\perp}$ является пространством решений однородной системы уравнений*

$$\left(\begin{array}{c|c} \longleftarrow v_1 \longrightarrow & 0 \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow & 0 \\ \dots & \dots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow & 0 \end{array}\right)$$

Теорема 7 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*

Тогда $U \cap W = (U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp}$.

Теорема 8 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*

Тогда $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$.

Лемма 7 *Пусть U векторное подпространство векторного пространства V.*

Тогда любой базис U можно дополнить до базиса V.

1.8 Определение линейной независимости векторов

Пусть $v_1, v_2, \dots, v_n$ векторы векторного пространства V. Справедливы следующие леммы, позволяющие выяснить линейную зависимость векторов за конечное число шагов.

Теорема 9 *Линейная независимость системы векторов не зависит от*

1) перестановки местами векторов системы векторов;

2) от умножения вектора системы векторов на ненулевое число;

3) от прибавления вектору системы векторов линейной комбинации других векторов системы векторов.

Это означает, что элементарными преобразованиями Гаусса векторы всегда можно привести к ступенчатому виду.

Евклидовы пространства

Определение 13 *Функция* $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ *называется скалярным произведением, если она обладет тремя свойствами для всех* u, w, v

1) $(u, v) = (v, u)$; *коммутативность*

2) $(u, u) > 0$ *кроме случая* $(\vec{O}, \vec{O}) = 0$; *положительная определенность*

3) $(u, \lambda w + \mu v) = \lambda(u, w) + \mu(u, v)$. *линейность*

Векторное пространство со скалярным произведением называется евклидовым. Длиной (нормой) вектора u *называется число* $\sqrt{(u, u)}$. *Углом между векторами* u *и* w *называется угол* $\alpha \in [0; \pi]$ *такой, что*

$$\cos \alpha = \frac{(u, w)}{|u||w|}.$$

Проекция вектора на вектор

Алгоритм Грамма-Шмидта

Пусть v_1, $v_2, \ldots,$

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1; \\
e_2 &= v_2 - \frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1; \\
e_3 &= v_3 - \frac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2; \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Применяя процесс ортогонализации к столбцам матрицы можно доказать, что каждую невырожденную матрицу O можно разложить в произведение $A = OU$, где O — ортогональная матрица, а U — треугольная матрица с положительными элементами на диагонали.

Проекция вектора на линейную облочку векторов

Кратчайшее расстояние от точки до линейной облочки

Определение 14 *Расстоянием между множествами* A *и* $B \subset E$ *евклидова пространства называется*

$$\rho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} |AB|.$$

Теорема 10 *Пусть* E *— евклидово пространство.*

Расстояние от вектора v *до векторного подпространства* $W \subset E$ *равно*

$$\rho(v, W) = |v - \mathit{Пр}_W v|.$$

Единственным ближайшим к вектору v *является вектор* $\mathit{Пр}_W v$.

◀

▶

Линейные преобразования (операторы)

Основное свойство линейных операторов

Преобразованием (оператором) на векторном пространстве $\varphi : V \to V$ называется некоторое правило сопоставляющее вектору v из V вектор w из V. Результат отображения w обозначается через $\varphi(v)$ или φv.

Преобразование φ линейного пространства называется линейным, если для любых векторов v и w и любого числа α выполнены равенства

$$\begin{aligned} \varphi(v+w) &= \varphi v + \varphi w; \\ \varphi(\alpha v) &= \alpha \varphi v. \end{aligned}$$

Рассмотрим n-мерное векторное пространство V. Выберем в V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и произвольный вектор v с координатами $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Пусть A — квадратная матрица $n \times n$. Определим преобразование следующим образом: вектору v сопоставим вектор с координатами

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Из свойств произведения матриц $A(B+C) = AB + AC$ и $A(\lambda B) = \lambda AB$ следует линейность этого преобразования.

Далее мы не будем различать запись вектора $v \in V$ с координатами $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ и его вектор-столбца — матрицы размера $n \times 1$, т.е.

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Лемма 8 *Рассмотрим векторное пространство V и его базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

Для любого линейного преобразования $f : V \to V$ верно равенство

$$\varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 \varphi(e_1) + x_2 \varphi(e_2) + \ldots + x_n \varphi(e_n).$$

$\lhd$ По первому свойству $\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = \varphi(x_1e_1) + \varphi(x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)$. По второму свойству полученная сумма равна $x_1\varphi(e_1) + \varphi(x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)$. Продолжая выводить слагаемые аргумента, мы получим требуемое равенство. $\rhd$

Из этой леммы выведем важное следствие о том, что каждое линейное преобразование можно задать с помощью матрицы.

Следствие 1 (об основном свойстве линейного преобразования) *Пусть V — векторное пространство размерности n и базисом $e_1, \ldots, e_n$.*

Для любого линейного преобразования $\varphi : V \to V$ существует матрица A размера $\dim V \times \dim V$ такая, что

$$\varphi v = A_e v.$$

Определение 15 *Матрица A_e такая, что $\varphi v = A_e v$ называется матрицей линейного преобразования в базисе $e_1, \ldots, e_n$.*

Лемма 9 *Для любого линейного преобразования $\varphi : V \to V$ верно равенство $\varphi\vec{0} = \vec{0}$.*

$\lhd$ Вектор $\varphi(\vec{0} + \vec{0})$, с одной сторны, равен $\varphi(\vec{0})$. С другой стороны, по первому свойству, равен $\varphi(\vec{0}) + \varphi(\vec{0})$. Единственным вектором, удовлетворяющим равенству $v = v + v$, является нулевой вектор. $\rhd$

Матрица линейного оператора в различных базисах

Определение 16 *Говорят, что две матрицы A и B подобны, если существует такая невырожденная матрица T , что $B = T^{-1}AT$. Матрица T будем называть матрицей, осуществляющей подобие (или матрицей перехода).*

Теорема 11 *Матрицы одного и того же линейного преобразования пространства V в двух различных базисах подобны. Матрица перехода является матрица перехода от одного базиса к другому.*

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $g_1, \dots, g_n$ – две базы в векторном пространстве V. Пусть T – матрица перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $g_1, \dots, g_n$. Это означает, что

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть A – матрица линейного преобразования φ. Тогда

$$A_e \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_e = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_e ,$$

где $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}_e^T$ — координаты вектора v в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$; $\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}_e^T$ — координаты вектора w в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Тогда

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_e = T \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_g \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}_e = T \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_g .$$

Это означает, что в новых координатах базиса g_1, g_2, g_3 справедливо равенство

$$A_e T \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_g = T \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_g .$$

Тогда

$$T^{-1} A_e T \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}_g .$$

Теорема доказана.

Собственные числа и собственные векторы оператора

Определение 17 *Пусть $\varphi : V \to V$ линейное преобразование n-мерного векторного пространства; A — матрица линейного преобразования φ.*

Число λ называется собственным числом *линейного отображения φ, если разрешима система линейных уравнений $(A_\varphi - \lambda E)v = 0$, где E — единичная матрица.*

Каждому собственному числу соответствует собственные вектор *или векторы v такие, что $Av = \lambda v$.*

Пусть λ — некоторая переменная. Тогда определитель $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ является многочленом степени n и называется характеристическим многочленом *линейного преобразования φ.*

Теорема 12 (о корнях характеристического многочлена) *Действительные и комплексные корни характеристического многочлена φ являются собственными числами линейного преобразования φ.*

$\lhd$ Выберем произвольный корень λ_0 характеристического многочлена. Тогда матрица уравнения $(A-\lambda_0 E)v=0$ вырождена по определению характеристического многочлена. Поэтому это уравнения имеет хотя бы одно ненулевое решение v. Из $(A-\lambda_0 E)v=0$ следует равенство $Av=\lambda v$ $\rhd$

Жорданова форма матрицы

Матрица B называется приведенным к жордановой форме, если она состоит из жордановых блоков, которые являются диагональными матрицами или жордановых клеток

$$\text{диагональные матрицы } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & & 0 \\ \dots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, \text{ жордановы клетки } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ \dots & \dots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

и их диагонали лежат на диагонали B.

Теорема 13 (о приведении матрицы к жордановой форме) *Пусть A квадратная матрица $n\times n$ имеет n различных пар (λ_1,v_1), (λ_2,v_2), $\dots$, (λ_n,v_n) собственных чисел и соответствующих собственных векторов, то матрица*

$$T=\begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода к жордановой форме

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Примеры линейных преобразований – растяжений. Пусть линейное преобразование φ некоторого n-мерного векторного пространства V задано матрицей

$$\varphi v=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} v.$$

Тогда можно представить себе геометрический смысл данного преобразования.

Умножение $\psi(x)=\lambda x$ назовем растяжением числовой оси с коэффициентом λ. Ясно, что если $\lambda>1$, то числовая ось растянется в λ раз. При $\lambda\in(0;1)$, числовая ось сожмется в $1/\lambda$ раз. При отрицательных λ произойдет то же самое, что при $|\lambda|$, затем нужно будет сделать зеркальную симметрию $x\mapsto -x$.

Таким образом, линейное преобразование φ растянет вдоль оси x_j пространство V в λ_j раз.

Теорема 14 *Если A — квадратная матрица $n\times n$ такая, что*

$$Av_1=\lambda_1 v_1, Av_2=\lambda_2 v_2,\dots,Av_n=\lambda_n v_n.$$

Тогда верно равенство

$$AT = TJ_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \ldots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Показать справедливость теоремы прямыми вычислениями $\rhd$

Теорема 15 *При условиях теоремы 14 в базисе из собственных векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матрица линейного оператора A является диагональной.*

Лемма 10 *Пусть λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n — собственные числа матрицы A размера $n \times n$.*
Тогда

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

$\lhd$ Следует из теорем 14, **??** и подсчета определителя диагональной матрицы. $\rhd$

Лемма 11 *Если $A = A^T$, т.е. матрица A является симметрической, то собственные числа матрицы A являются вещественными.* ∇ *б. д.* $\triangle$

Лемма 12 *Пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — координаты вектора v относительно нового базиса $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и*
$(w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n})$ *— координаты вектора w_1 относительно базиса e*
$(w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n})$ *— координаты вектора w_2 относительно базиса e*
$\ldots$
$(w_{n1}, w_{n2}, \ldots, w_{nn})$ *— координаты вектора w_n относительно базиса e.*
Тогда координаты $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)$ вектора v относительно старого базиса $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ удовлетворяют условию:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \ldots & w_{n2} \\ & & & \\ w_{1n} & w_{2n} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \ldots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

$\lhd$ Переписать в выражении $v = v'_1 w_1 + v'_2 w_2 + \ldots + v'_n w_n$ векторы w_1, $w_2, \ldots, w_n$ через векторы e_1, e_2, $\ldots$, e_n $\rhd$

Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису. Переход к новому базису из собственных векторов и жорданова форма матрицы.

Лемма 13 *Пусть A — матрица линейного преобразования f относительно старого базиса W, B — матрица линейного преобразования f относительно нового базиса E и T — матрица перехода от старых координат к новым. Тогда верно равенство $B = T^{-1}AT$.*

Теорема о жордановой форме матрицы при совпадении собственных чисел.

Теорема 16 *Пусть f — линейное преобразование R^n такое, что*

$$Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}, \quad Av_{k+2} = \lambda_{k+2} v_{k+2}, \quad \ldots, \quad Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ линейно независимы, остальные собственные числа совпадают $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$.

Тогда существуют собственные и присоединенные к ним векторы $v_1, v_k, \dots, v_k$ *такие, что*

$$\begin{array}{llllllll} v_{s_1} & \mapsto^f \dots & \mapsto^f v_2 & \mapsto^f v_1 & \mapsto^f 0; \\ v_{s_2} & \mapsto^f \dots & \mapsto^f v_{s_1+2} & \mapsto^f v_{s_1+1} & \mapsto^f 0; \\ & & \dots & & \\ v_k & \mapsto^f \dots & \mapsto^f v_{s_t+2} & \mapsto^f v_{s_t+1} & \mapsto^f 0; \end{array}$$

и верно равенство

$$AT = TJ, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \dots \\ \longleftarrow v_n \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J = \begin{pmatrix} J_1 & & \dots & & \\ & J_2 & \dots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \dots & J_{t+1} & \\ & & \dots & & J_{\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\dots,\lambda_n} \end{pmatrix},$$

где

$$J_1, J_2, \dots, J_{t+1} \text{ имеют вид } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

и размеры $s_1 \times s_1, (s_2 - s_1) \times (s_2 - s_1), \dots, (s_{t+1} - s_t) \times (s_{t+1} - s_t)$ *соответственно.* ∇ *б.д.* $\triangle$

1.9 Примеры решения задач

1. Найдите матрицу A линейного преобразования φ такого, что $\varphi(v_1) = w_1$, $\varphi(v_2) = w_2$, $\varphi(v_3) = w_3$, где $v_1 = (-2, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, -3)$, $v_3 = (-2, -1, -2)$, $w_1 = (2, 2, -3)$, $w_2 = (3, -2, 6)$, $w_3 = (7, 1, 2)$.

Решение задачи. Из условия следует, что

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Проверим обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 1 & -6 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ответ

$$A = \begin{pmatrix} -23 & 37 & 5 \\ -16 & 27 & 5 \\ 14 & -25 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотрим векторное пространство многочленов степени не выше 2 и базис в этом пространстве $1, x, x^2$. Найдите матрицу линейного преобразования $\varphi(P(x)) = (3x + 2)P'(x)$.

Решение задачи. Задача решается аналогично предыдущей. Вместо v_1, v_2 и v_3 выберем 1, x, x^2. Легко подсчитать

$$\varphi 1 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi x = 3x + 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi x^2 = 6x^2 + 4x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = A.$$

3. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 \\ -12 & -7 & 6 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Подсчитаем характеристический многочлен

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & 3 & 0 \\ -12 & -7-\lambda & 6 \\ -3 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10.$$

Подберем корень $\chi(\lambda)$. Ясно, что $\lambda_1 = -1$ – корень. Найдем

$$(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10) : (\lambda - (-1)) = -\lambda^2 + 7\lambda - 10.$$

Остальные корни легко найти $\lambda_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{9}}{-2} = 2$ и $\lambda_3 = \dfrac{-7 - \sqrt{9}}{-2} = 5$.

Для каждого собственного вектора $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$ найдем собственные векторы.

В случае $\lambda_1 = -1$ необходимо найти ненулевое частное с.л.у.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8-(-1) & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -7-(-1) & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 5-(-1) & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 6 & 0 \\ -12 & -6 & 6 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & -18 & 0 \\ 0 & -6 & 18 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-x_3, 3x_3, x_3).$$

Собственный вектор $v_1 = (-1, 3, 1)$.

В случае $\lambda_1 = 2$ решим о.с.л.у.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -9 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-x_3, 2x_3, x_3)$$

Собственный вектор $v_2 = (-1, 2, 1)$.

В случае $\lambda_1 = 5$ решим о.с.л.у.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & 6 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_2, 0)$$

Собственный вектор $v_3 = (1, -1, 0)$.

Тогда по теореме о жордановой форме матрицы должно быть выполнено сопряжение

$$T^{-1}AT = J, \text{ где } T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Проверим.

$$A\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } TJ = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, жорданова форма J матрицы A найдена верна.

4. Найдите собственные значения и векторы линейного преобразования из задачи 2.

Подсчитаем характеристический многочлен

$$\chi(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-6).$$

Для каждого собственного вектора $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$ найдем собственные векторы.

В случае $\lambda_1 = 0$ необходимо найти ненулевое частное с.л.у.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0).$$

Собственный вектор $v_1 = (1, 0, 0)$.

В случае $\lambda_1 = 3$ решим о.с.л.у.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (2x_2, 3x_2, 0).$$

Собственный вектор $v_2 = (2, 3, 0)$.

В случае $\lambda_1 = 6$ решим о.с.л.у.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (4x_3, 12x_3, 9x_3).$$

Собственный вектор $v_3 = (4, 12, 9)$.

Тогда по теореме о жордановой форме матрицы должно быть выполнено сопряжение

$$T^{-1}AT = J, \text{ где } T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ и } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Проверим.

$$AT = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 24 \\ 0 & 9 & 72 \\ 0 & 0 & 54 \end{pmatrix} \text{ и } TJ = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 24 \\ 0 & 9 & 72 \\ 0 & 0 & 54 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, жорданова форма J матрицы A найдена верна.