Экзаменационные вопросы по "Геометрии и алгебре" (алгебра)
ПМ-09. 1 курс, 1 семестр. *http://yktmath.narod.ru*

вопросы на хорошо: 4, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 25. тройку: 1, 2, 5, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 25.

1. Линейное уравнение. Система линейных уравнений (с.л.у.). Решение с.л.у. Совместные и несовместные с.л.у. Краткая запись. Эквивалентные с.л.у. *Элементарные преобразования с.л.у.*

2. *Элементарные преобразования с.л.у.* Прямой ход метода Гаусса.

3. *Элементарные преобразования с.л.у.* Обратный ход метода Гаусса.

4. Ступенчатый вид с.л.у. *Докажите, что любую с.л.у. можно привести к ступенчатому виду.* Свободные переменные.

5. Линейное уравнение $ax = b$ с одним неизвестными. *Критерий существования единственного решения. Теорема о вырожденном случае.*

6. С.л.у. с двумя неизвестными и двумя уравнениями. Геометрическая интерпретация. *Критерий существования единственного решения (с помощью понятия параллельности).*

7. Определитель матрицы 2×2. *Критерий существования единственного решения.*

8. Подстановка. *Число подстановок n-ой степени.* Инверсия. Четность подстановки σ и ее знак $\operatorname{sgn}\sigma$. Лемма о знаке произведения подстановок.

9. Определитель квадратной матрицы размерности $n \times n$. *Определитель матрицы* 3×3.

10. Свойство определителя: *при транспонировании определитель матрицы не меняется. Матрица с нулевой строчкой имеет нулевой определитель.*

11. Свойство определителя: *при перестановке местами строк матрицы A определитель* $\det A$ *меняет знак.*

12. Свойства определителя: *матрица A содержащая хотя бы две одинаковые строки имеет нулевой определитель. при умножении строки матрицы A на $\lambda \neq 0$, определитель* $\det A$ *увеличится λ раз. Матрица с пропорциональными строками имеет нулевой определитель.*

13. Свойства определителя: *Пусть $A_i(v)$ — матрица, где с i-ая строка заполнена набором чисел v.* Тогда $\det A_i(v) + \det A_i(w) = \det A_i(v + w)$.

14. Свойства определителя: *Если одна из строк матрицы A есть линейная комбинация других строк, то определитель* $\det A = 0$. *Определитель не меняется, если к любой строке прибавить другую строку, умножив на произвольное число.*

15. Свойства определителя: *Если одна из строк матрицы A есть линейная комбинация других строк, то определитель* $\det A = 0$. *Определитель не меняется, если к любой строке прибавить другую строку, умножив на произвольное число.*

16. Подматрица. Минор. Алгебраическое дополнение элемента матрицы. *Теорема Лапласа.*

17. *Теорема Крамера. Определитель Вандермонда.*

18. *Критерий существования и единственности решения с.л.у., где число неизвестных равно числу уравнений.*

19. Умножение матриц. Ассоциативному умножения матриц. Галоидная матрица. Определение обратной матрицы. *«Простой» метод нахождения обратной матрицы $A_{2\times 2}$. «Универсальный» метод нахождения обратной матрицы $A_{n\times n}$* с помощью миноров.

20. *Метод нахождения $A^{-1}_{n\times n}$* с помощью «параллельного решения n с.л.у.».

21. *Теорема об единственности обратной матрицы.*

22. Теорема о $\det AB = \det A \det B$. *Следствие об отсутствии обратных к вырожденным матрицам. Следствие об определителе обратной матрицы.*

23. *Теорема о существовании обратной матрицы для невырожденных.* Сложение матриц и умножение матриц на число.

24. Три определения ранга матрицы. *Теорема о равенстве рангов матрицы.* Метод окаймления миноров. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

25. *Теорема Комбижира-Камелии о совместимости системы линейных уравнений.*

Утверждения набранные *курсивом* необходимо доказывать. ЗАЧЕТ по алгебре = все индивидуальные задания + положительная оценка (3,4,5) на зачете. Оценка ОТЛИЧНО на экзамене по алгебре = задача решена + теоретический вопрос ответил на отлично + дополнительные вопросы. Оценка ХОРОШО на экзамене по алгебре = задача решена + теоретический вопрос ответил + дополнительные на "хорошо" или задача. Оценка УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО на экзамене по алгебре = задача решена + дополнительные вопросы на "тройку".

1 Системы линейных уравнений

1.1 Что такое с.л.у.?

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — некоторые действительные числа; x_1, x_2, …, x_n — некоторые символы. Тогда для каждого натурального n выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

называется линейным уравнением. Символы x_1, x_2, …, x_n мы будем называть переменными или неизвестными.

Рассмотрим m линейных уравнений, которые нужно решить одновременно:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. . \qquad (1)$$

Определение 1 *Выражение (1) называется системой m линейных уравнений с n неизвестными. Набор из n чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется решением с.л.у., если при подстановке этого набора в с.л.у. вместо неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ все равенства станут верными. Множество всех решений с.л.у. называется множеством решений с.л.у. Если с.л.у. имеет хотя бы одно решение, то с.л.у. называется совместной, иначе с.л.у. называется несовместной. Множество решений несовместной с.л.у. называется пустым.*

Совместная система называется определенной, если множество решений с.л.у. имеет единственное решение, и неопределенной, если множество решений с.л.у. имеет бесконечно много решений.

Если множества решений систем линейных уравнений совпадают, то эти с.л.у. называются эквивалентными.

Далее вместо (1) будем писать следующее выражение для краткости.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \qquad (2)$$

Можно сказать, что весь семестр мы будем исследовать с.л.у. Вопросы, которые нас интересуют: *как находить решения с.л.у.?, когда с.л.у. разрешима?, как выглядят решения с.л.у.?.*

Чтобы ответить на этот вопрос мы введем понятия матрицы, определителя матрицы, векторного пространства, векторного подпространства, линейной зависимости, размерности, фундаментальной системы решений и т.д.

Для решения с.л.у. часто используют *методы исключения неизвестных* или *метод Гаусса.* В этих методах шаг за шагом выражают неизвестную через другие и исключают из системы уравнений.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Является ли несовместная с.л.у. эквивалентной уравнению $x_1^2 = -1$?

2. Как измениться (2), если второе уравнение умножить на 2?

3. Как измениться (2), если первое и второе уравнения поменять местами?

4. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array}\right). \qquad (3)$$

1.2 Как решать с.л.у.? — метод Гаусса

1.2.1 Элементарные преобразования

Ознакомимся с тремя элементарными преобразованиями с.л.у., с помощью которых мы сможем упростить любую с.л.у. до очевидного вида.

Лемма 1 (1-е элементарное преобразование) *При перестановке местами уравнений с.л.у. останется эквивалентной прежней.*

◀ Пусть A — множество решений старой с.л.у., B — новой с.л.у. Ясно, что $A \subseteq B$ и также очевидно $A \supseteq B$. Тогда $A = B$ ▶

Аналогичное доказательство имеет следующая лемма

Лемма 2 (2-е элементарное преобразование) *При умножении уравнения на ненулевое число с.л.у. останется эквивалентной прежней.*

Более содержательным является последняя лемма об элементарных преобразованиях

Лемма 3 (3-е элементарное преобразование) *Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ следующие с.л.у. эквивалентны*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+\lambda a_{l1} & a_{k2}+\lambda a_{l2} & \dots & a_{kn}+\lambda a_{ln} & b_k+\lambda b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{4}$$

◀ Пусть A — множество решений первой с.л.у., B — второй с.л.у.

Рассмотрим произвольную $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$. При подстановке этого набора чисел во вторую с.л.у. для всех строках, кроме k-й, равенства очевидно верны. Рассмотрим левую часть k-го равенства. После перегруппировки слагаемых это выражение равно $(a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \ldots + a_{kn}x_n^0) + \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна b_k, вторая b_l. Следовательно, все это выражение равно $b_k + \lambda b_l$. Таким образом, k-ое выражение второй с.л.у. является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in B$. Это означает, что $A \subseteq B$.

Рассмотрим произвольную $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in B$. При подстановке этого набора чисел в первую с.л.у. равенство k-й пока не очевидно. Рассмотрим левую часть этого равенства. После перегруппировки слагаемых рассматриваемое выражение равно $\left[(a_{k1}+\lambda a_{l1})x_1^0 + (a_{k2}+\lambda a_{l2})x_2^0 + \ldots + (a_{kn}+\lambda a_{ln})x_n^0\right] - \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна $b_k + \lambda b_l$, вторая b_l. Следовательно, все это выражение равно b_k. Таким образом, k-ое выражение первой с.л.у. является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$. Это означает, что $B \subseteq A$.

Итого, из $A \subseteq B$ и $A \supseteq B$ следует $A = B$ — эквивалентность этих с.л.у. ▶

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right). \tag{5}$$

2. Можно ли элем. преобр-ми избавится от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме одной?

3. Можно ли элементарными преобразованиями несовместной с.л.у. получить совместную?

4. Можно ли применять элементарные преобразования к столбцам с.л.у.?

1.2.2 Описание метода Гаусса решения систем уравнений

Рассмотрим с.л.у. из m уравнений и n переменных.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{6}$$

1) Прямой ход метода Гаусса.

а) Среди коэффициентов первого столбца имеется ненулевой, иначе переменная x_1 отсутствует в с.л.у., то x_1 может принимать любое значение. Такие переменные называются *свободными переменными.*

б) Выберем среди коэффициентов первого столбца ненулевой a_{k1} и назовем *ведущим.*

в) Поменяем 1-ю и k-ю строки местами. Выпишем полученную с.л.у.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right). \tag{7}$$

г) Из каждой i-ой строки ниже ведущего элемента вычтем 1-ю строку, умножив на a'_{i1}/a'_{11}.

Таким образом, мы избавились от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме первого уравнения. Далее решаем систему линейных уравнений без первого уравнения и столбца.

Продолжая прямой ход Гаусса, в конце получим с.л.у. *ступенчатого вида.*

$$1^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \ast & * & * & * & * \\ 0 & \ast & * & * & * \\ 0 & 0 & \ast & * & * \end{array}\right) \end{array}, \quad 2^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \ast & * & * & * & * \\ 0 & \ast & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \ast & * \end{array}\right) \end{array}, \quad 3^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \ast & * & * & * & * \\ 0 & \ast & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

В случае 1° свободная переменная — x_4; в 2° свободная переменная — x_3; в 3° свободные переменные — x_3 и x_4.

2) Обратный ход метода Гаусса.

Если одной из уравнений имеет вид $(0\ 0\ 0\ \dots\ 0 \mid c\ )$, где $c \neq 0$, то это уравнение $0 = c$ не имеет решения. Тогда не имеет решения и с.л.у. Иначе с.л.у. совместна и множество ее решений найдем после обратного хода Гаусса.

Пусть имеется k нетривиальных уравнений в ступенчатом виде с.л.у. Пусть переменные, не являющиеся свободными, имеют индексы $i_1, i_2, \dots, i_k$.

а) Из самого нижнего уравнения мы выразим x_{i_k} через b_{i_k} и свободные переменные.

Теперь при рассмотрении $(k-1)$-го уравнения x_{i_k} можно заменить через число и свободные переменные.

Продолжая это действие, мы выразим все переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ через свободные переменные и некоторые числа.

При любых значениях свободных переменных мы будем получать новое решение с.л.у.

С.л.у. имеет единственное решение, если она совместна и не имеет свободных переменных.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right). \tag{8}$$

2. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 29 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 22 \end{array}\right).$$

1.3 Когда с.л.у. имеет единственное решение?

1.3.1 Определитель матрицы 1×1

Приведем очевидные утверждения.

Теорема 1 (Критерий существования единственного решения) *Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственное решение.*

Теорема 2 (Вырожденный случай) *Если $a = 0$, то уравнение $ax = b$, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.*

1.3.2 Определитель матрицы 2×2

Рассмотрим систему линейных уравнений из двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{9}$$

Считаем, что каждое из уравнений имеет хотя бы одну переменную, т.е. хотя бы один из коэффициентов a_{11} и a_{12} не равен нулю и хотя бы один из коэффициентов a_{21} и a_{22} не равен нулю. Тогда каждое из уравнений задает прямую на плоскости с координатами x и y.

Рассмотрим случай $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x + \dfrac{b_1}{a_{12}}; \\ y = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x + \dfrac{b_2}{a_{22}}. \end{cases} \tag{10}$$

Если угловые коэффициенты $-\dfrac{a_{11}}{a_{12}} \neq -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}$, то данные прямые не являются параллельными. Непараллельные прямые имеют единственное пересечение [1].

Параллельные прямые либо не имеют точки пересечения, либо совпадают и тогда с.л.у. имеет бесконечно много решений.

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем системы (9). Поскольку определитель зависит только от коэффициентов левой части с.л.у., то всегда пишут так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Из всех рассуждений мы делаем следующий вывод.

Теорема 3 (Критерий существования единственного решения) *Если определитель системы линейных уравнений из 2 уравнений с 2 неизвестными не равен нулю, то эта система имеет единственное решение.*

Иначе система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

◀ Таким образом, при $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$ критерием существования единственного решения является условие $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Другие возможные случаи: $a_{12} = 0$ и $a_{22} = 0$; $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} = 0$; $a_{12} = 0$ и $a_{22} \neq 0$.

В первом случае мы имеем прямые параллельные оси ординат и определитель равен нулю.

Во втором случае вторая прямая параллельна оси ординат, первая — нет. Тогда определитель не равен нулю и прямые не параллельны.

В третьем случае первая прямая параллельна оси ординат, вторая — нет. Тогда определитель не равен нулю и прямые не параллельны.

Таким образом, во всех случаях с.л.у. (9) имеет единственное решение только в случае $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ▶

1.4 Определитель матрицы $n \times n$

Для определения понятия определителя матриц $n\times n$ нам понадобится каждой строке поставить в соответствие столбец.

Определение 2 *Выпишем в таблицу номера строк и ниже номера столбцов:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

где $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \{1, 2, \dots n\}$. Такие таблицы называются подстановками из n элементов. Далее будем считать, что $\sigma 1 = t_1$, $\sigma 2 = t_2$, ..., $\sigma n = t_n$.

Заметим, что номера столбцов (числа второй строки подстановки) не повторяются.

Пример подстановки: $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ — не подстановка.

Из определения следует, что $\mu 1 = 3$, $\mu 2 = 1$, $\mu 3 = 2$ и $\mu 4 = 4$.

Множество всех подстановок из n элементов обозначается через S_n.

Лемма 4 *Число всех подстановок степени n равно $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$*

◀ Построим произвольную подстановку n-ой степени. Выберем произвольный t_1. Это можно сделать n различными способами. Затем выберем t_2 из множества $\{1, 2, .., n\}$ без t_n. Этот выбор можно сделать $n-1$ способом. Продолжим процесс выбора элементов. При выборе последнего элемента t_n останется единственный вариант. Таким образом, число вариантов выбора подстановки равно $n \cdot (n-1) \cdot .. \cdot 2 \cdot 1$ ▶

Рассмотрим произвольную подстановку (3) из n элементов. Говорят, что числа t_k и t_m составляют *инверсию,* если $t_k < t_m$ и t_k стоит правее t_m. *Четностью подстановки* σ называют четность числа инверсий в нем.

Определим функцию знака подстановки

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ четная}, \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная}. \end{cases}$$

Определение 3 *Произведением подстановок*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

назовем следующую подстановку

$$\sigma\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_{t_1} & s_{t_2} & \dots & s_{t_n} \end{pmatrix}.$$

Лемма 5 *Для любых подстановок σ и ρ верно равенство*

$$sgn\, \sigma\rho = sgn\, \sigma\, sgn\, \rho.$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Определите четность подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

2. Найдите $\sigma 3$, $\rho 5$, $\mu 4$. **3.** Найдите произведения подстановок $\sigma\rho$ и $\mu\sigma$.

4. Найдите обратные подстановки σ^{-1}, ρ^{-1} и μ^{-1}.

5. Существует ли подстановка из 4 элементов без инверсий? Существует ли подстановка из 5 элементов с 10 инверсиями?

1.4.1 Первое определение

Определение 4 *Определителем матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется выражение

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\sigma \, a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma n},$$

где суммирование ведется по всевозможным подстановкам $\sigma \in S_n$.

Случай $n = 2$. Число подстановок равно по лемме 4 равно $2! = 2$. Выпишем все эти подстановки со знаками.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Случай $n = 3$. Число подстановок S_3 равно 6. Выпишем все эти подстановки со знаками

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

1.4.2 Второе определение

Определение 5 *Определителем квадратной матрицы A размером $n \times n$ называется сумма всевозможных правильных произведений, где правильным произведением называется произведение n элементов матрицы на разных строках и столбцах и знака подстановки индексов* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$.

1.4.3 Свойства определителей

Транспонированной матрицей матрицы a_{ij} называют матрицу a_{ji}. Обозначается как A^T. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Свойство 1 *Для любой квадратной матрицы A выполнено*

$$\det A = \det A^T.$$

◀ Справедливы равенства

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{1\sigma 1} \dots a_{n\sigma n} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; a_{\sigma^{-1}1 1} \dots a_{\sigma^{-1}n n} = \det A^T.$$

Суммы равны, поскольку слагаемые равны (по лемме 5 верно $\operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma^{-1} = 1$) ▶

Свойство 2 *Если строка матрицы A состоит из нулей, то* $\det A = 0$.

Свойство 3 *При перестановке местами двух строк матрицы определитель меняет знак.*

◀ Пусть $\tau = (rs)$ транспозиция, меняющая местами элементы r и s. Понятно, что $\tau^{-1}S_n = \{\tau^{-1}\sigma | \sigma \in S_n\} = S_n$.

$$\det(b_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{11\sigma}..a_{rr\sigma}..a_{ss\sigma}..a_{nn\sigma}$$

$$= \sum_{\tau\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \tau\sigma a_{11\tau\sigma}..a_{rr\tau\sigma}..a_{ss\tau\sigma}..a_{nn\tau\sigma} = \sum_{\sigma \in \tau^{-1}S_n} -\operatorname{sgn} \sigma a_{11\sigma}..a_{nn\sigma} = \det(a_{ij}).$$

Последнее равенство выполнено в силу выбора τ. ▶

Свойство 4 *Если матрица A содержит одинаковые строки, что* $\det A = 0$.

Свойство 5 *Если строку матрица A умножить на λ, то* $\det A$ *возрастет в λ раз.*

Свойство 6 *Если матрица A содержит пропорциональные строки, что* $\det A = 0$.

Свойство 7 *Пусть $A_i(v)$ — матрица, где с i-ая строка заполнена набором чисел v.*
Тогда $\det A_i(v) + \det A_i(w) = \det A_i(v + w)$.

◀ $\det(c_{ij}) =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; c_{11\sigma}..c_{ss\sigma}..c_{nn\sigma} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; c_{11\sigma}....(a_{ss\sigma} + b_{ss\sigma})..c_{nn\tau\sigma} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; c_{11\sigma}....a_{ss\sigma}..\sigma c_{nn\sigma} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \; c_{11\sigma}....b_{ss\sigma}..c_{nn\sigma} =$$

$$\det(a_{ij}) + \det(b_{ij}).$$ ▶

Свойство 8 *Если одна из строк матрицы A является линейной комбинацией, то* $\det A = 0$.

Свойство 9 *Если строке матрицы A прибавить линейную комбинацию других строк, то определитель не изменится.*

Свойство 10

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdot .. \cdot \lambda_n.$$

Замечание. Из первого свойства следует, что все эти утверждения справедливы и для столбцов.

Матрицу с нулевым определителем называют вырожденной.

Определение 6 *Выберем в матрице A по k произвольных строк и столбцов. Из элементов стоящих на пересечении этих строк и столбцов можно составить новую матрицу, которую называют подматрицей A. Определитель подматрицы A называется минором.*

Выбросим из матрицы A строку с номером i и столбцом j. Определитель полученной подматрицы называется минором элемента a_{ij}. Обозначается через M_{ij}. Выражение $(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ назывется алгебраическим дополнением. Обозначается через A_{ij}.

Лемма 6 *Если матрица содержит строку, состоящую из единственного ненулевого элемента a_{ij}, то определитель этой матрицы равен произведению этого элемента и ее алгебраического дополнения. Другими словами, справедливо равенство*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{ij}A_{ij}. \tag{12}$$

◀ Последовательно меняем i-ую строку со всеми последующими строками и j-ый столбец со всеми последующими столбцами. По свойству 3 знак определителя изменится $n-i+n-j = 2n-(i+j)$ раз. Четность числа $2n-(i+j)$ совпадает с четностью $i+j$.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j}a_{ij}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Вынесем a_{ij} за пределы определителя по свойству 5.

Покажем, что полученная матрица имеет определитель равный M_{ij}. Введем преообозначение

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n-1} & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n-1,1} & \dots & a'_{n-1,n-1} & a'_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ — подстановка индексов произвольного ненулевого правильного произведения матрицы (14). Выпишем это произведение

$$\operatorname{sgn}\sigma a'_{1\sigma 1}\cdot a'_{2\sigma 2}\cdot\ldots\cdot a'_{n-1\sigma n-1}\cdot 1. \tag{15}$$

Ясно, что $\sigma n = n$.

Пусть $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix}$. Тогда число инверсий μ и σ совпадают. Следовательно, $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\mu$.

Теперь ясно, что слагаемое минора $\operatorname{sgn}\mu a'_{1\mu 1}\cdot a'_{2\mu 2}\cdot\ldots\cdot a'_{n-1\mu n-1}$ совпадает с (15).

Таким образом, (13) равен $a_{ij}A_{ij}$ ▶

Теорема 4 (Лапласа) *Определитель матрицы можно разложить по строке следующим образом:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},\ \textit{для любой строки } i,$$

или разложить по столбцу:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj},\ \textit{для любого столбца } j.$$

◀ По свойству 7 справедливо разложение:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По лемме 6 каждое k-ое слагаемое в полученной сумме равно $a_{ik}A_{ik}$. ▶

Невырожденным называется квадратная матрица с ненулевым определителем.

Теорема 5 *Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ невырожденная квадратная матрица.*

Тогда матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

является обратной матрицы A.

◀ Пусть $(c_{ij}) = (a_{ij}) \times (b_{ij})$. Докажем, что $c_{ij} = \delta_{ij}$.

Рассмотрим $c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. По теореме Лапласа сумма $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ является разложением определителя матрицы с двумя совпадающими строками, если $i \neq j$; и матрицы A, если $i = j$ ▶

1.5 Формула Крамера

Теорема 6 (Крамер) *Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ & .. & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$$

с невырожденной квадратной матрицей A. Пусть A_i получена из A заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Тогда система $Ax = b$ имеет единственной решение:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, \frac{\det A_n}{\det A}\right).$$

◀ Докажем справедливость формулы Крамера. Матрица $A^{-1}b$ размерности $n \times 1$ является решением с.л.у. Используя предыдущую теорему, получим решение

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ji}}{\det A} b_i, \text{ для } j = \overline{1, n}.$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} A_{ji}b_i$ является разложением определителя матрицы A_j по j-му столбцу — столбцу свободных членов.

Докажем единственность решения. Пусть сущестует еще одно решение x'. Тогда

$$x' = A^{-1}Ax' = A^{-1}b = x \quad ▶$$

1.6 Примеры вычисления определителей матриц $n \times n$

1.6.1 Приведение к треугольному виду

Лемма 7 *При попарной перестановке строк матрицы A знак определителя изменится на* $(-1)^{[\frac{n}{2}]}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{[\frac{n}{2}]} \det \begin{pmatrix} a_{1n} & \dots & a_{12} & a_{1n} \\ a_{2n} & \dots & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & a_{n2} & a_{n1} \end{pmatrix}$$

◀ При четном n достаточно $\frac{n}{2} = [\frac{n}{2}]$ перестановок, при нечетном n — $\frac{n-1}{2} = [\frac{n-2}{2}]$ ▶

1.6.2 Рекуррентные соотношения

Лемма 8 *Пусть*

$$I_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad I'_{n-1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда определитель I_n удовлетворяет рекуррентному соотношению $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$ и начальному условию $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$.

◀ Разложим I_n по первой строке по Лапласу: $I_n = 2I_{n-1} - 3I'_{n-1}$. В свою очередь I'_{n-1} разложим по столбцу: $I'_{n-1} = I_{n-2}$. Тогда $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$. Равенства $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$ легко проверяются прямыми вычислениями. ▶

1.6.3 Определитель Вандермонда

Лемма 9 *Верно равенство*

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

◀ Вычтем первую строку из каждой k-й строки ниже, умножим на x_1^{k-1}. В результате обнулим первый столбец ниже элемента 1. В результате разложения определителя по первому столбцу достаточно найти определитель

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 + x_1 & \dots & x_n + x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{k-2}(x_2, x_1) & \dots & Q_{k-2}(x_n, x_1) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $a^k - b^k = (a-b)Q_{k-1}(a,b)$, где $Q_{k-1}(a,b) = a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}$.

Из равенства $Q_{k-1}(a,b) - bQ_{k-2}(a,b) = a^{k-1}$ следует, что вычитая из каждой строчки

▶

1.7 Матрица и операции над матрицами

Матрица над полем вещественных чисел размерности $m \times n$ — таблица составленная из m строк и n столбцов заполненная вещественными числами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Обозначается как $(a_{ij})_{m\times n}$.

Если элементы матрицы (16) совпадают с коэффициентами с.л.у. (6), то матрицу (16) называют *матрицей с.л.у.* (6). Следующую матрицу называют *расширенной матрицей с.л.у.* (6)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & \dots & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{17}$$

Матрицы одинаковой размерности можно *суммировать*:

$$(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Любую матрицу можно *умножить на число*: $\lambda(a_{ij})_{m\times n} + (\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Умножение определено для матриц $(a_{ij})_{m\times n}$ и $(b_{ij})_{r\times s}$, если число столбцов n первого сомножителя равно числу строк r второго сомножителя:

$$(c_{ij})_{m\times s} = (a_{ij})_{m\times n} \cdot (b_{ij})_{n\times s}, \text{ где } c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}. \tag{18}$$

1.8 Матрицы специального вида

Матрица называется *квадратной,* если число ее строк равно числу столбцов.

Диагональю квадратной матрицы $(a_{ij})_{n\times n}$ называются элементы матрицы a_{ii}, $i = \overline{1,n}$.

Диагональной матрицей называется матрица с нулевыми элементами вне диагонали. Обозначается как

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где $a_{ii} = \lambda_i$, $i = \overline{1,n}$.

Матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной.* Легко проверить,что произведение любой квадратной матрицы A на единичную матрицу соответствующей размерности равно самой матрице $A = AE = EA$. Элементы единичной матрицы обозначают, как

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Теорема 7 *Для любых квадратных матриц справедливо равенство*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Теорема 8 *Критерий обратимости матрицы. Существует обратная квадратной матрицы если и только если определитель матрицы не равен нулю.*

1.8.1 Ранги матрицы.

Ранг матрицы A — число ненулевых строк после приведения A к ступенчатому виду.

Теорема. Все ранги матрицы совпадают.

1.9 Критерий совместности с.л.у.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна если и только если ранг матрицы с.л.у. совпадает с рангом расширенной матрицы с.л.у. $\overline{A}$: