Бастакы күн. 8 кылаас.

1 Рассмотрим $A_{n-1}A_n = ((n-1)^2+n)(n^2+n+1) - ((n-1)^2+n)(n^2+n+1) = (n^2-n+1)(n^2+n+1) = (n^2+1-n)(n^2+1+n) = (n^2+1)2 - n^2 = n^4+n^2+1$. Ясно, что член последовательности с номером n^2 равен n^4+n^2+1.

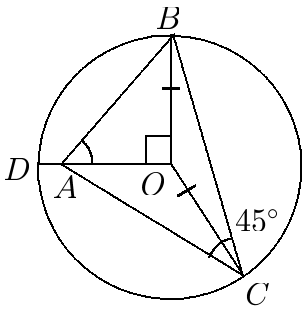
2 Предположим обратное. Пусть на складе нет полулитровых банок. Обозначим количество банок по 0,7л, через x, количество литровых банок через y. Тогда $\begin{cases} 0,7x+y=2002; \\ x+y=2600. \end{cases}$

Отсюда $0,3x = 598$ и $x = \frac{5980}{3}$. Данная дробь не является целым числом, поскольку 5980 не кратно 3. Но количество банок может быть только целым числом. Пришли к противоречию. Следовательно, на складе имеется хотя бы одна полулитровая банка.

Если взять две полулитровые банки и 0,7-литровых — 1990, 1-литровых — 608, то их суммарная количество 2600 и емкость 2002 л.

3 При правильной игре победит первый. Покажем выигрышную стратегию первого игрока. Произвольно выбираем две точки A и B; соединим их. Если проведенный вторым игроком отрезок начинается из точки A, то следующий свой отрезок первый заканчивает в точке A, и наоборот — если второй игрок начинает отрезок из A, то первый заканчивает в точке B. Первый и далее действует так, при этом, второму все время придется начинать свой отрезок из одной из точек A и B. После 7-го хода первого, каждая точка, отличная от двух выбранных, окажется соединенной отрезком с каждой из точек A и B, и второму не удастся провести свой отрезок.

4 Проведем окружность с центром в точке O и радиуса OB она проходит через точку C, так как $OB = OC$.



Пусть OA пересекает эту окружность в точке D. Тогда $\angle DOB = 90°$, т.е. $\angle BCD = 45°$, но по условию $\angle ACB = 45°$, значит лучи CD и CD, отсюда и точки A и D совпадают. Следовательно, треугольник AOB — прямоугольный, равнобедренный и $\angle AOB = 45°$.

5 Так как цифр 9 (кроме нуля), то по принципу Дирихле у этого числа хотя бы четыре одинаковых цифр. Оставив их, зачеркнем все остальные. 1111 делится на 101, поэтому число, составленное из четырех одинаковых цифр, делится на 101.

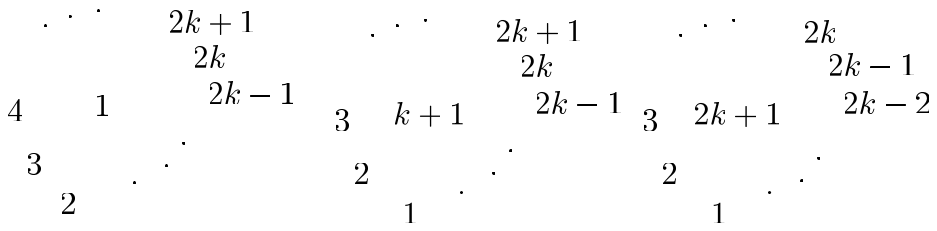
Иккис күн
Үөһээ лига. 8 кылаастар

1 Данное уравнение равносильно уравнению $bc = (b+c)a$. Обозначим произведение общих делителей a и b через x, a и c — y, b и c — z. Тогда $a = xyd_1$, $b = xzd_2$ и $c = yzd_3$, для некоторых d_1, d_2 и d_3. Ясно, что эти числа попарно простые. Покажем, что $d_1 = 1$. Подставим в уравнение $bc = (b+c)a$ значения полученные выражения a, b и c, то $xyz^2d_2d_3 = (xzd_2 + yzd_3)xyd_1$. Тогда $zd_2d_3 = (xd_2 + yd_3)d_1$. Отсюда z кратно d_1. Если $d_1 \neq 1$, то $(a,b,c) = d_1 \neq 1$. Поэтому $a = xy$, $b = xz$ и $c = yz$. Таким образом, $abc = (xyz)^2$.

2 Пусть Вове дали задание расставить числа $1, 2, \ldots, 2k+1$. Сумма этих чисел $S = (2k+1)(k+1) = 2k^2+3k+1$. Число стоящее в центре обозначим через x. Сумма всех сумм по

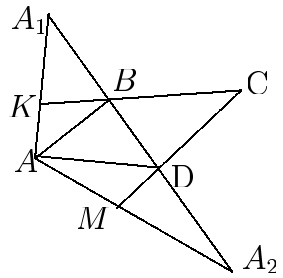
диаметрам равна $S - x + kx = S + (k-1)x$. Поскольку рассмотренная сумма является суммой k одинаковых чисел, то $2k^2+3k+1+kx-x$ должно быть кратно k. Это означает, что $1-x$ кратно k. Отсюда следует, что возможны только варианты $x = 1, k+1, 2k+1$.

Покажем, что каждая из этих трех случаев выбора x остальные числа можно расставить по кругу. Напротив наименьшего числа поставим наибольшее и продолжим подобным образом расставлять эти числа.



3 Допусти обратное — существуют a, b, c и d такие, что суммы $a+b$, $a+c$ и $b+c$ являются степенями 3, т.е. нечетными числами. Это означает, что среди чисел a, a, b, b, c, c ровно три нечетных и три четных числа, что невозможно.

4 Пусть K и M — точки пересечения прямых CB и AA_1, CD и AA_2. Из условия следует, что BK — ось симметрии треугольника ABA_1, поэтому $AB = BA_1$ и BK — биссектриса угла ABA_1. Отсюда следует, что $\angle CBD = \angle KBA_1 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABD)$. Аналогично, $\angle CDB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADB)$. Тогда $\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle CDB = \frac{1}{2}(\angle ABD + \angle ADB) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD) = 60^\circ$.



5 Перенумеруем кузнечиков — 1, 2, 3. Положению abc, (123, 132, 213, 231, 312, 321) сопоставим знак выражения $(a-b)(a-c)(b-c)$. Докажем, что это выражение при каждом прыжке меняет знак (т.е. является инвариантом).

Возможны два случая: 1) a и b меняются своим положением. Этот случай возможен, когда a перепрыгнет через b, или b перепрыгнет через a. 2) b и c меняются местами. В обоих случаях выражение меняет знак. Действительно, bac соответствует выражение $(b-a)(b-c)(a-c)$, имеющее противоположный знак знаку выражения $(a-b)(a-c)(b-c)$. Для acb соответствует $(a-c)(a-b)(c-b)$. Ясно, что a и c не могут поменяться местами, все возможные случаи разобраны.

Таким образом, знак выражения $(a-b)(a-c)(b-c)$ меняется поочередно. В начале оно равно $(1-2)(1-3)(2-3)$ и отрицательно. После 2009 прыжков это выражение станет положительным, т.е. кузнечики не смогут вернуться даже в первоначальную очередность 123.

Иккис күн
Бастакы лига. 8 кылаастар

1 Перепишем равенство $n = ab + 2a - b$. Поскольку n кратно a, то b кратно a. Это означает, что $b = at$ для некоторого натурального a. Из делимости n на b, следует делимость $2a$ на b. Тогда справедливы неравенства $b = at \geqslant a$ и $2a \geqslant b = at$.

Ясно, что либо $t = 1$, либо $t = 2$. Первый случай невозможен, поскольку a и b различны. Тогда $b = 2a$. Следовательно, $2n = 4a^2 = (2a)^2$.

2 Данное неравенство $3+3a^2+3a^4 \geqslant 1+a^2+a^4+2a+2a^2+2a^3$ равносильно неравенству $2-2a-2a^3+2a^4 \geqslant 0$. Преобразуем левую часть неравенства $2(1-a)-2a^3(1-a) \geqslant 0$. Теперь ясно, что достаточно доказать неотрицательность выражения $2(1-a^3)(1-a)$ при любом a.

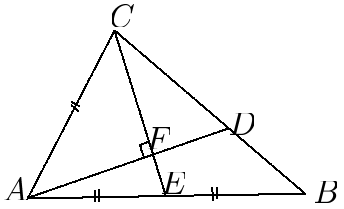
По формуле разности квадратов $2(1-a^3)(1-a) = 2(1+a+a^2)(1-a)^2$. Выделим полный квадрат $1+a+a^2 = (a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$. Поскольку каждый из множителей $2((a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})(1-a)$ неотрицательно, то и все произведение неотрицательно.

3

						6 2 5
		7	4 7	4 7 2	3 4 7 2	3 4 7 2
1 5	1 6 5	1 6 5	1 6 5	1 6 5	5 1 6 5	5 1 6 5
2 3 4	2 3 4	2 3 4	2 3 4	2 3 4	7 2 3 4	7 2 3 4

4 Перебором легко показать, что $x + S(x) \neq 1234$. Покажем, это. Ясно, что $x < 1234$, тогда x имеет один из следующих двух видов: $12**$, $11**$, $10**$, 999. В любом случае $S(x) \leqslant 27$. Тогда $x \geqslant 1207$. x имеет вид $12**$. Тогда $S(x) \leqslant 12$. Это означает, что $x \geqslant 1222$. Заметим, что x не может быть кратным трем. Осталось перебрать варианты: $1222, 1223, \ldots, 1230$. Решения нет. Следовательно, 1234 не может встретиться в последовательности.

5 Заметим, что указанные медиана и биссектриса не могут выходить из одной вершины, так как в противном случае угол при этой вершине был бы больше 180°.



Пусть теперь в треугольнике ABC биссектриса AD и медиана CE пересекаются в точке F. Тогда AF — биссектриса и высота треугольника ACE, значит, этот треугольник равнобедренный ($AC = AE$), а так как CE — медиана, то $AB = 2AE$ и, следовательно, $AB = 2AC$.