Физико-математический Форум «Ленский край»
Ликвидация безграмотности

ЗИМНИЕ СБОРЫ

комбинаторика оценка и пример неравенства геометрия остатки сравнения алгебра принцип дирихле диофантовы уравнения инварианты графы 8 кл

Здесь собраны учебные задачи материалов кировских школ 2004 и 2005 г., питерских кружков и пр.

Комбинаторика

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от выбора элемента a) — n способами, то выбор «либо a, либо b» можно сделать $m+n$ способами.

Правило произведения. Если элемент а можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от выбора элемента a) — n способами, то выбор «a, затем b» можно сделать $m \cdot n$ способами.

1.1. Сколько существует девятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

1.2. Каких восьмизначных чисел больше: тех, в записи которых есть двойка, или остальных?

1.3. Для группы из 3 детей и 5 взрослых удалось купить 5 билетов в плацкартный вагон и 3 в купейный. Сколькими способами они могут распределиться по вагонам, если в каждом вагоне должен ехать хотя бы один взрослый?

Размещения — батарыы,
перестановки — атастаһыннарыы,
сочетания — бөлөхтөөһүн

1.4. В турнире участвует 8 спортсменов. Сколькими способами могут определиться золотой, серебряный и бронзовый призеры?

1.5. Монету бросают 10 раз. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

1.6. Сколько слов длины 5 может быть в языке с 3 буквами в алфавите?

Определение 1 *Пусть $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ — множество из n элементов. Наборы вида $(b_1, \dots, b_k)$, где $b_1, \dots, b_k \in M$ будем называть k-размещениями. Два k-размещения считаются различными, если они отличаются друг от друга входящими в них элементами или порядком элементов.*

Если в размещениях элементы $b_1, \dots, b_k$ попарно различны, то это размещения без повторений. Если же среди элементов

$b_1, \dots, b_k$, *могут попадаться одинаковые, то такие наборы называются размещениями с повторениями.*

Количества размещений без повторений и с повторениями обозначаются A_n^k и $\overline{A}_n^k$ соответственно.

1.7. Докажите, что

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1);$$
$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

1.8. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево.

Определение 2 *Пусть* $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ *— множество из* n *элементов. Наборы вида* $(b_1, \dots, b_n)$, *где* $b_1, \dots, b_n \in M$ *попарно различны, будем называть перестановками.*

1.9. Докажите, что число перестановок n элементов равно $n!$

1.10. Сколько есть различных перестановок цифр от 1 до 9, в которых цифры 1 и 7 стоят на своих местах?

1.11. Сколько есть различных перестановок цифр, в которых цифры 2, 8 и 9 стоят рядом?

1.12. Сколько шестизначных чисел содержат хотя бы одну четную цифру?

1.13. Сколько ожерелий можно составить из 10 различных бусин (ожерелье нельзя переворачивать)?

1.14. Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых нечетна?

1.15. Сколькими способами можно выбрать 5 карт из колоды 36 различных игральных карт?

1.16. Коля из колоды 36 различных игральных карт собирается выбрать 5 карт, а Вася — 3. Сколькими способами это возможно?

Определение 3 *Пусть* $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ *— множество из* n *элементов.* k*-сочетаниями называются наборы вида* $\{b_1, \dots, b_k\}$, *где* $b_1, \dots, b_k \in M$ *различны и порядок считается несущественным. Это количество обозначается через* C_n^k *и читается «число сочетаний из* n *по* k*» — «*n*-тан* k*-лыы бөлөхтөөһүн ахсаана».*

1.15. Докажите, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.16. Для группы из 15 детей и 3 взрослых удалось купить 8 билетов в плацкартный вагон и 10 в купейный. Сколькими способами они могут распределиться по вагонам, если в каждом вагоне должен ехать хотя бы один взрослый?

1.18. Докажите, что

Теорема 1 (Бином Ньютона) *Для любых* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n.$$

1.19. Найдите $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

1.20. В мешочке лежит 13 разных конфет. Мальчик наугад вынимает оттуда несколько конфет. Сколькими способами он может это сделать?

1.21. Поезду, в котором находится 100 пассажиров, предстоит сделать 5 остановок. а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках? б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

1.22. Доктор Ватсон 31 июня подарил Шерлоку Холмсу две дюжины романов Дарьи Донцовой. Сколькими способами сыщик может расставить их на имеющихся у него семи книжных полках (возможно, некоторые полки останутся пустыми, порядок книг на полке роли не играет)?

1.23. Малыш способен съесть не более 10 тефтелек, Бимбо — не более 20, а Карлсон — не более 50. Сколькими способами они могут поделить по-братски 70 тефтелек? (По-братски — значит, чтобы каждому хоть что-то досталось).

1.24. Найдите $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$.

1.25. Докажите

Теорема 2 (Неравенство Бернулли) *Для любых* $x > 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *верно неравенство*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

1.26. Докажите, что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Принцип Дирихле — скорее, не кролики и клетки,
а умение доказывать от обратного

Принцип Дирихле

2.1. В классе учится 22 ученика. Докажите, что из них можно выбрать четырех, которые родились в один день недели.

2.2. Докажите, что среди любых шести человек найдется либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

2.3. В квадрате со стороной 10 отметили 201 точку. Докажите, что какие-то три из выбранных точек можно накрыть квадратом со стороной 1.

2.4. Десять команд играют в футбольном турнире, проходящем в один круг. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие в этом турнире одинаковое количество матчей.

2.5. Докажите, что из любых n целых чисел можно выбрать несколько (возможно, одно), сумма которых делится на n.

2.6. Равносторонний треугольник A можно закрыть пятью равносторонними треугольниками одинакового размера (треугольники могут перекрываться и выступать за пределы треугольника A). Докажите, что треугольник A можно полностью закрыть и четырьмя такими треугольниками.

2.7. Дано 82 кубика, каждый из которых покрашен в какой-то цвет. Докажите, что среди них найдутся либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных.

2.8. Сумма 123 чисел равна 3813. Доказать, что из этих чисел можно выбрать 100 с суммой не меньше 3100.

2.9. Доказать, что существуют две степени тройки, разность которых делится на 1000.

2.10. Доказать, что существует степень тройки, которая оканчивается на 0001.

2.11. Доказать, что найдется а) число вида 1989...19890...0, делящееся на 1988. б) число вида 1988...1988, делящееся на 1989.

2.10. Доказать, что существует число Фибоначчи, которая оканчивается на 0001.

Принцип крайнего

2.1. По кругу записано 100 чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все 100 чисел равны.

2.2. В системе Зеленой 1001 планета. На каждой из этих планет сидит астроном и смотрит в телескоп на ближайшую планету. Докажите, что если попарные расстояния между планетами различны, то найдется планета, на которую никто не смотрит.

2.3. Несколько команд сыграли между собой круговой турнир по волейболу. Будем говорить, что команда A сильнее команды B, если либо A выиграла у B, либо существует команда C такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Докажите, что победитель турнира сильнее остальных команд.

Оценка + пример

3.1. Каково наименьшее натуральное n такое, что $n!$ делится на 18, на 19, на 20 и на 21?

3.2. Несколько камней весят вместе 10 т, при этом каждый из них весит не более 1 т. На каком наименьшем количестве трехтонок можно увезти этот груз за один раз?

3.3. Какое наибольшее количество а) ладей, б) слонов, в) коней, не бьющих друг друга, можно расставить на шахматной доске?

3.4. Какое наименьшее число прямоугольников 1×2 клетки нужно закрасить на доске 8×8 клеток так, чтобы любой квадрат 2×2 содержал по крайней мере одну закрашенную клетку.

3.5. N цифр — единицы и двойки — расположены по кругу. Изображенным назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых не содержит цифр, отличных от 1 и 2, могут оказаться среди изображенных?

3.6. Найдите наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы 2002 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр и в виде суммы 2003 натуральных.

Инварианты

4.1. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9; либо, вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

4.2. В шести коробках лежат конфеты. В первой — 1, во второй — 2, в третьей — 3, ..., в шестой — 6. За один ход разрешается в любые две коробки добавить по одной конфете. Можно ли за несколько ходов уравнять количество конфет в коробках?

4.3. Можно ли таблицу 5×5 заполнить числами так, чтобы сумма чисел в любой строке была положительной, а сумма чисел в любом столбце — отрицательной?

4.4. На столе стоят вверх дном 25 стаканов. За один ход Вася может перевернуть любые два стакана. Сможет ли Вася за несколько ходов поставить все стаканы правильно?

4.5. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук. В какой-то момент времени все жуки взлетают, и после этого каждый из жуков садится в клетку, соседнюю по стороне с той, из которой он взлетел. Докажите, что в какую-то клетку не сядет ни одного жука.

4.6. В пробирке находятся марсианские амебы трех типов: A, B и C. Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амеба. Каким может быть ее тип, если исходно амеб типа A было 20 штук, типа B — 21 штука и типа C — 22 штуки?

4.7. На доске написаны числа 1, 2 и 4. Разрешается стереть с доски два числа a и b, и вместо них записать числа $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. можно ли с помощью таких операций получить на доске числа $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ и 3?

4.8. На доске написано число 12. Каждую минуту число умножают или делят либо на 2, либо на 3, и результат записывают на доску вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

4.9. Можно ли доску 10×10 разрезать на прямоугольники 4×1?

Графы

Определение 4 *Графом называется множество точек (вершин), некоторые из которых соединены между собой линиями (ребрами).*

1.1. В соревнованиях «кто кого переговорит» с пятью участниками только Степа и Леша сыграли одинаковое число встреч, а все остальные — различное, причем никакие два участника не встречались друг с другом дважды. Сколько встреч сыграли они?

Степенью вершины называется количество ребер выходящих из нее. Вершина называется *четным*, если степень вершины четна, иначе вершина *нечетна*.

Теорема 3 *Число нечетных вершин любого графа четно.*

1.2. Можно ли придумать пять таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими.

1.3. У Пети 5 друзей среди одноклассников. У остальных его одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Саши всего один друг. Докажите, что Петя может отправить Саше записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.

1.4. В графе каждая вершина — синяя или зеленая. При этом каждая синяя вершина соединена с 3 синими и 6 зелеными, а каждая зеленая — с 5 синими и 4 зелеными. Какое наименьшее число вершин с такими условиями может быть?

1.5. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание было приглашено по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется врач, который в них работает. Сколько в городе поликлиник и сколько врачей принимало участие в совещании?

1.6. На листе бумаги отмечена 2005 точек. Двое играют в следующую игру: каждый своим ходом соединяет две отмеченные точки линией. Запрещается соединять пару точек повторно. Проигрывает тот, после чьего хода из любой точки можно пройти в любую другую, двигаясь от вершины к вершине по проведенным линиям. Кто выигрывает при правильной игре?

Деревья и прогулки по ним

Если считать, что из одной вершины графа можно перейти к другой только по ребрам, то естественно возникает понятие *пути* и *цикла*. Цикл — путь в котором никогда не возвращаются в предыдущую вершину, но вернуться начальную вершину. Вершина степени 1 называется висячей. Вершина степени 0 называется изолированной.

Определение 5 *Деревом называется связный граф без циклов. Если из любой вершины графа можно дойти до любой другой по некоторому пути, то такой граф называется связным.*

1.7. Докажите, что если в графе существует единственный маршрут из любой вершины в любую другую, то этот граф — дерево.

1.8. Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.

1.9. Докажите, что таких вершин по крайней мере две.

1.10. Докажите, что в дереве вершин на одну больше, чем ребер.

1.11. Все города Трапезундии (в том числе столица) соединены кольцевой железной дорогой. Кроме того, столица соединена отдельными линиями с каждым из городов, кроме соседей по кольцу. Правительство решило разделить железнодорожную сеть между двумя компаниями так, чтобы, пользуясь дорогами любой из компаний, можно было доехать от любого города до любого другого. Можно ли выполнить это решение?

1.12. На каждую общую сторону двух клеток шахматной доски положена спичка. Какое минимальное количество спичек придется убрать, чтобы из каждой клетки можно было дойти до каждой, не перепрыгивая через спички?

1.13. Ребра графа, степени всех вершин которого равны 5, раскрасили в три цвета так, что по ребрам каждого цвета можно от любой вершины дойти до любой другой. Каким могло быть число вершин этого графа?

1.14. В связном графе В вершин и Р ребер. Сколько ребер надо удалить, чтобы получить скелет этого графа?

1.15. Волейбольная сетка имеет размер 20 ячеек в высоту и 300 ячеек в длину. Хулиган Артем по одной разрезает веревочки сетки. Какое наибольшее число веревочек ему удастся разрезать до того, как сетка распадется на 2 куска?

1.16. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов покрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

Прогулки по произвольным графам

Определение 6 *Путь, проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется эйлеровым путем. Эйлеров путь, начало и конец которого совпадают, называется эйлеровым циклом.*

1.17. Докажите, что если все вершины связного графа четные, то в нем существует эйлеров цикл (докажите сначала, что в нем есть хоть какой-нибудь цикл);

1.18. Докажите, что связный граф с двумя нечетными вершинами имеет эйлеров путь.

1.19. Город в плане выглядит как квадрат 3×3, каждая сторона квартала-квадратика — участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

1.20. В стране ОЗ пять городов. Каждые два города соединены друг с другом либо красной, либо синей дорогой так, что никакие три дороги не образуют треугольник одного цвета с вершинами в городах. Докажите, что можно, находясь в любой точке, обойти по красным дорогам все города и вернуться обратно, не проходя два раза по одной и той же дороге. Докажите, что то же самое справедливо для синих дорог.

1.21. Ожидая поезда в Ижевск, Аря и Ксюша вышли с вокзала, погуляли по Кирову, потом пообедали в кафе «Карабас-Барабас», после чего решили вернуться на вокзал, проходя только по тем улицам, по которым до этого уже проходили нечетное число раз. Докажите, что им это удастся.

1.22. Каждое из ребер полного графа с 9 вершинами покрашено в синий или красный цвет. Докажите, что либо есть четыре вершины, все ребра между которыми — синие, либо есть три вершины, все ребра между которыми — красные.

Теория чисел

Теорема 4 (Основная теорема арифметики.) *Любое натуральное число представимо в единственном виде*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

где $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ простые и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ натуральные числа.

1.1. Разложите на простые множители числа 111, 1 111, 11 111, 111 111, 1 111 111. Попробуйте 239.

1.2. Чтобы проверить является ли число 401 простым как много простых чисел нужно перебрать?

1.3. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

1.4. Докажите, что $x^2 = 3y^2$ не имеет нетривиальных (т.е. кроме нулевого) решений в целых числах.

1.5. Докажите, что $x(x-1) = 2y + 1$ не имеет решений в $\mathbb{Z}$.

1.6. У натурального числа n ровно 100 различных делителей. Найдите их произведение.

1.7. Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

Простые числа — непростые задачи

2.1. Верно ли, что многочлен $P(n) = n^2 + n + 41$ при всех n принимает только простые значения?

2.2. Докажите, что существуют сколь угодно много последовательных чисел, не содержащих простых.

2.3. Используя $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} + \ldots)$, покажите, что если $2^n + 1$ — простое, то n является степенью 2.

Простые вида $2^{2^k} + 1$ называются *числами Ферма.*

2.4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Общие делители

3.1. Если числа a и b имеют одинаковое множество делителей, то они совпадают.

Определение 7 *Если числа a и b не имеют общих делителей кроме 1, то они называются взаимно простыми.*

3.2. В чем различие между «a, b, c, d взаимно простые» и «a, b, c, d попарно взаимно простые»?

3.3. Докажите для любых натуральных $a > b$, что $(a, b) = (a, b - a)$.

3.4. Постройте алгоритм нахождения (a, b).

3.5. Как, зная (a, b) и ab, найти НОК (a, b)?

3.6. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ для которых $n^3 - 3$ делится на $n - 1$.

3.7. Докажите, что при любом целом положительном n число $n^2 + 8n + 15$ не делится на $n + 4$.

3.8. Докажите, что равенство $(a, mn) = 1$ равносильно выполнению двух условий $(a, m) = 1$ и $(a, n) = 1$.

Сравнения по модулю

Определение 8 $a - b \,\vdots\, m \Leftrightarrow a = b + mt \Leftrightarrow$ *a и b имеют одинаковые остатки при делении на m. Во всех этих случаях говорят «a сравнимо с b по модулю m».*

Это отношение обозначают через $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \equiv_m b$.

4.1. Если $a \equiv_m b$ и $c \equiv_m d$, то

1) $a + c \equiv_m b + d$;
2) $na \equiv_m nb$;
3) $a - c \equiv_m b - d$;
4) $a \cdot c \equiv_m b \cdot d$;
5) $a^n \equiv_m b^n$;

4.2. Когда из $an \equiv_m bn$ следует $a \equiv_m b$?

4.3. Теперь меняем модуль.

6) $an \equiv_{mn} bn$;
7) из $an \equiv_{mn} bn$ следует $a \equiv_m b$;
8) из $a \equiv_{mn} b$ следует $a \equiv_m b$;
9) из $an \equiv_{mn} b$ следует $b \,\vdots\, n$;
10) из $a \equiv_m b$ следует $(a, m) = (b, m)$.

Определение 9 *Целые числа распадаются на m классов (множества, которые не пересекаются, и в объединении дают все целые числа). Эти классы называются классами вычетов и обозначаются через $\mathbb{Z}_m$.*

Для обозначения класса, обычно, используют одно из чисел $0, 1, \ldots, m-1$ этого класса. Тогда получается странная арифметика

$$2 + 2 \equiv_3 1$$

4.4. Поупражняйтесь:

$$\begin{array}{lll} 2+5 \equiv_7 ?, & 3^2 + 2 \equiv_{10} ?, & 3^{2008} \equiv_{10} ?, \\ 5^{2008} \equiv_8 ?, & 2^{2008} \equiv_{17} ?, & 2^{2008} \equiv_{17} ?, \\ 2^{2^{1959}} - 1 \vdots 3, & 1^{1999} + 2^{1999} + \ldots + 16^{1999} \vdots 17. & \end{array}$$

4.5. Докажите, что n^2 сравнимо либо с 0, либо с 1 по модулю 4.

4.6. Докажите, если $x^2 + y^2 = z^2$ и z — нечетно, то x или y кратно 4.

4.7. Докажите, что $4x + 3 = y^2$ не имеет решений.

4.8. Докажите, что $3x - 1 = y^2$ не имеет решений.

Линейные диофантовы уравнения

5.1. Покажите, что если $(a, b) \nmid c$, то уравнение $ax + by = c$ не имеет решений.

5.2. Покажите, что если $c \vdots (a, b)$, то уравнение $ax + by = c$ равносильно другому уравнению $\frac{a}{(a,b)}x + \frac{b}{(a,b)}y = \frac{c}{(a,b)}$.

5.3. Покажите, что $(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}) = 1$.

5.4. Покажите, что если $(a, b) = 1$, и (x_0, y_0) решение $ax+by = 1$, то (cx_0, cy_0) решение $ax + by = c$.

5.5. Покажите, что если $(a, b) = 1$, и (x_c, y_c) решение $ax+by = c$, то $(x_c/c, y_c/c)$ — целые числа и являются решениями $ax + by = c$.

5.6. Если $(a, b) = 1$ и (x_0, y_0) частное решение $ax+by = 1$, то все решения этого уравнения это множество $\{(x_0 + bt, y_0 - at) | t \in \mathbb{Z}\}$.

5.7. Решите уравнения в целых числах:

$$\begin{array}{ll} 2x + 3y = 1; & 6x + 7y = 1; \\ 6x + 3y = 3; & 6x + 9y = 2; \\ 3x + 5y = 7; & 21x + 48y = 6; \\ 1990x - 173y = 11; & 45x - 37y = 25; \\ 109x + 89y = 1; & 43x + 13y = 21; \\ 34x - 21y = 1; & 10x + 2y + 18z = 7; \end{array}$$

5.8. Хулиганы В. и П. порвали стенгазету, причем П. рвал каждый кусок на 5 частей, а В. на 9. При попытке собрать стенгазету нашли 1988 обрывков. Докажите, что нашли не все кусочки.

Теорема Эйлера и Ферма

6.1. Выпишите элементы $\mathbb{Z}_6$ взаимно простые с 6.

6.2. Выпишите элементы $\mathbb{Z}_8$ взаимно простые с 8.

Определение 10 *Такие элементы называются приведенной системой вычетов по модулю m.*

Количество элементов $\mathbb{Z}_m$ взаимно простые с m обозначается через $\varphi(m)$ — функция Эйлера.

6.3. Докажите, что если $n_1, n_2, \ldots, n_{\varphi(m)}$ — приведенная система вычетов по модулю m и $(a, m) = 1$, то $an_1, an_2, \ldots, an_{\varphi(m)}$ — также приведенная система вычетов по модулю m.

6.4. Докажите, что если $(a, m) = 1$, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv_m 1.$$

6.5. Пусть p — простое число. Найдите $\varphi(p)$.

6.6. Пусть p — простое число. Найдите $\varphi(p^\alpha)$.

6.7. Докажите (это не просто!), что

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot \ldots (p_n^{\alpha_n} - p_n^{\alpha_n - 1}).$$

6.8. **Теорема Эйлера.** Если $(a, m) = 1$, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv_m 1.$$

6.9. Устно докажите малую **теорему Ферма:** если p — простое и $(a, p) = 1$, то

$$a^{p-1} \equiv_p 1.$$

6.10. Найдите остаток от деления 2^{100} на 101.

6.11. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

6.12. Пусть p — простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$ для любых целых a и b.

6.13. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv_{pq} p + q$.

6.14. Пусть p — простое число, и a не делится на p. Докажите, что найдется натуральное число b, для которого $ab \equiv_p 1$.

6.15. Пусть для простого числа $p > 2$ и целого a, не делящегося на p, выполнено сравнение $x^2 \equiv_p a$. Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p 1$.

6.16. Пусть n — натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо n^8+1, либо n^8-1 кратно 17.

6.17. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a, 561) = 1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv_{561} 1$. Числа, обладающие этим свойством, называются числами Кармайкла.

6.18. Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится на 101.

6.19. Пусть $(m, n) = 1$. Докажите, что сумма длин периода и предпериода десятичного представления дроби m/n не превосходит $\varphi(n)$.

Разнобой

7.1. Докажите, что для любого числа d, не делящегося на 2 и на 5, найдется число, в десятичной записи которого содержатся одни единицы и которое делится на d.

7.2. Из двухсот чисел: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, 199, 200$ произвольно выбрали сто одно число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

7.3. Существует ли такая окружность, на которой имеется ровно одна точка с целыми координатами?

7.4. Последовательность $\{x_n\}$ устроена следующим образом: $x_1 = 3^{2001}$, а каждый следующий член равен сумме цифр предыдущего. Найдите x_5.

7.5. Докажите, что число

$$100\ldots00500\ldots001$$

(в каждой из двух групп по 100 нулей) не является кубом целого числа.

7.6. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна.

7.7. Тождество Гаусса. Докажите равенство

$$\sum_{d|n} \varphi(n) = n,$$

где знак $d \mid n$ означает, что суммирование идет по всем делителям числа n.

7.8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляются всевозможные семизначные числа, в записи которых каждая из этих цифр встречается ровно один раз. Доказать, что сумма всех таких чисел делится на 9.

7.9. Пусть $S(x)$ — сумма цифр натурального числа x. Решите уравнение:

$$x + S(x) = 2001.$$

7.10. Найдите какое-нибудь натуральное число A, такое что если приписать его к самому себе справа, то полученное число будет полным квадратом.

Заключительная олимпиада

1. На гранях куба написаны натуральные числа, а в каждой вершине — произведения чисел на трех гранях с этой вершиной. Найдите сумму чисел на гранях, если сумма в вершинах равна 70. *(А. Шаповалов)*

2. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка F. Оказалось, что отрезок AF пересекает медиану BD в точке E так, что $AE = BC$. Докажите, что $BF = FE$. *(М. Сонкин)*

3. Даны две системы прямоугольников на плоскости I и II. Известно, что любые два прямоугольника из различных систем имеют общую точку и стороны их параллельны. Докажите, что либо все прямоугольники в одной системе имеют общую точку, либо существуют две прямые, первая из которых пересекает все прямоугольники системы I, а вторая — все прямоугольники системы II. *(В. Дольников)*

4. Имеется 10 спортсменов разного роста и 10 разного веса. Верно ли, что найдутся 10 спортсменов, любые два из которых отличаются и ростом и весом? *(А. Белов)*

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1. Докажите, что если длины перпендикуляров, опущенных из вершины B на прямые AA_1 и CC_1 равны, то треугольник ABC — равнобедренный. *(Н. Агаханов)*

6. Найдутся ли какие-нибудь 4 натуральных числа таких, чтобы среди наибольших общих делителей пар встретились 6 последовательных чисел *(А. Шаповалов)*