Физико-математический Форум «Ленский край»
Ликвидация безграмотности

ОСЕННИЕ СБОРЫ

геометрия полиномы комбинаторика графы сравнения по модулю диофантовы уравнения неравенства числа принцип Дирихле инв

Здесь собраны учебные задачи
материалов кировских школ 2004 и 2005 г.,
питерских кружков и пр.

Комбинаторика

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от выбора элемента a) — n способами, то выбор «либо a, либо b» можно сделать $m+n$ способами.

Правило произведения. Если элемент а можно выбрать m способами, а элемент b (независимо от выбора элемента a) — n способами, то выбор «a, затем b» можно сделать $m \cdot n$ способами.

1.1. Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры?

1.2. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть единица, или остальных?

1.3. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево.

1.4. Для группы из 3 детей и 3 взрослых удалось купить 3 билетов в плацкартный вагон и 3 в купейный. Сколькими способами они могут распределиться по вагонам, если в каждом вагоне должен ехать хотя бы один взрослый?

Размещения — батарыы,
перестановки — атастаһыннарыы,
сочетания — бөлөхтөөһүн

Определение 1 *Пусть $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество из n элементов. Наборы вида $(b_1, \ldots, b_k)$, где $b_1, \ldots, b_k \in M$ будем называть k-размещениями. Два k-размещения считаются различными, если они отличаются друг от друга входящими в них элементами или порядком элементов.*

Если в размещениях элементы $b_1, \ldots, b_k$ попарно различны, то это размещения без повторений. Если же среди элементов $b_1, \ldots, b_k$, могут попадаться одинаковые, то такие наборы называются размещениями с повторениями.

Количества размещений без повторений и с повторениями обозначаются A_n^k и $\overline{A}_n^k$ соответственно.

1.5. Докажите, что

$$A_n^k = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1);$$
$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

1.6. В турнире участвует 8 спортсменов. Сколькими способами могут определиться золотой, серебряный и бронзовый призеры?

1.7. Монету бросают 5 раз. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

1.8. Сколько слов длины 5 может быть в языке с 3 буквами в алфавите?

Определение 2 *Пусть $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество из n элементов. Наборы вида $(b_1, \ldots, b_n)$, где $b_1, \ldots, b_n \in M$ попарно различны, будем называть перестановками.*

1.9. Докажите, что число перестановок n элементов равно $n!$

1.10. Сколько есть различных перестановок цифр от 1 до 9, в которых цифры 4 и 8 стоят на своих местах?

1.11. Сколько есть различных перестановок цифр, в которых цифры 1 и 2 стоят рядом?

1.12. Сколько шестизначных чисел содержат хотя бы одну четную цифру?

1.13. Сколько ожерелий можно составить из 10 различных бусин (ожерелье нельзя переворачивать)?

1.14. Сколько существует девятизначных чисел, сумма цифр которых четна?

Определение 3 *Пусть $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество из n элементов. k-сочетаниями называются наборы вида $\{b_1, \ldots, b_k\}$, где $b_1, \ldots, b_k \in M$ различны и порядок считается несущественным. Это количество обозначается через C_n^k и читается «число сочетаний из n по k» — «n-тан k-лыы бөлөхтөөһүн ахсаана».*

1.15. Докажите, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.16. Для группы из 15 детей и 3 взрослых удалось купить 8 билетов в плацкартный вагон и 10 в купейный. Сколькими способами они могут распределиться по вагонам, если в каждом вагоне должен ехать хотя бы один взрослый?

1.17. Сколькими способами можно раздать по 6 карт шести игрокам при игре в подкидного дурака? (всего в колоде 36 карт)

1.18. Докажите, что

Теорема 1 (Бином Ньютона) *Для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливо*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n.$$

1.19. Найдите $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.

1.20. В мешочке лежит 13 разных конфет. Мальчик наугад вынимает оттуда несколько конфет. Сколькими способами он может это сделать?

1.21. Поезду, в котором находится 100 пассажиров, предстоит сделать 5 остановок. а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках? б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

1.22. Доктор Ватсон 31 июня подарил Шерлоку Холмсу две дюжины романов Дарьи Донцовой. Сколькими способами сыщик может расставить их на имеющихся у него семи книжных полках (возможно, некоторые полки останутся пустыми, порядок книг на полке роли не играет)?

1.23. Малыш способен съесть не более 10 тефтелек, Бимбо — не более 20, а Карлсон — не более 50. Сколькими способами они могут поделить по-братски 70 тефтелек? (По-братски — значит, чтобы каждому хоть что-то досталось).

1.24. Найдите $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$.

1.25. Докажите

Теорема 2 (Неравенство Бернулли) *Для любых $x > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство*

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

1.26. Докажите, что

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Виет, Кардано, Феррари — видимо, итальянцы;
Безу — француз;
а кто Полином
и Дискриминант?
(из разговора)

Многочлены

Определение 4 *Многочленами (полиномами) называются выражения вида*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

где n — целое неотрицательное число, $a_0, \ldots, a_n$ — действительные числа. Наибольшее k такое, что $a_k \neq 0$ называется степенью многочлена P и обозначается $\deg P$. *Числа $a_n, \ldots, a_0$ называются коэффициентами многочлена P. Число a_n называется старшим коэффициентом, а число a_0 — свободным членом. Многочлены считаются равными, если они имеют одинаковый вид.*

1.1. При каких a, b, c равны многочлены $(x^2 + bx + c)(x + a)$ и $x^3 + 4x^2 + 5x + 6$?

1.2. Доказать, что если значение многочлена $f(x)$ при всех x нулевое, то и сам многочлен нулевой. Доказать, что если значения двух многочленов совпадают во всех точках, то многочлены равны.

1.3. Известно, что степень многочлена $\deg f(x) = 3$ и степень многочлена $\deg g(x) = 4$. Чему могут равняться степени многочленов **а**) $f(x) + g(x)$, **б**) $f(x) \cdot g(x)$, **в**) $f(g(x))$?

1.4. Найти сумму коэффициентов многочлена

а) $(x + 1)^{50}$,

б) $(x^3 + x + 3)^{13} - (x^5 + x^2 - 1)^{2008}$,

в) $x(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$.

1.5. Докажите, что не существует многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $f(-1) = 2$ и $f(1) = 1$.

1.6. Докажите, что не существует многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ и $f(3) = 5$.

1.7. Верно ли, что любой многочлен, принимающий целые значения в целых точках, имеет целые коэффициенты?

Многочлен $P(x)$ *делится нацело на ненулевой многочлен* $Q(x)$, если существует такой многочлен $H(x)$, называемый частным, что $P(x) = Q(x)H(x)$.

Разделить многочлен $P(x)$ на ненулевой многочлен $Q(x)$ с остатком — это значит найти такие многочлены $H(x)$ (неполное частное) и $R(x)$ (остаток), что выполнено равенство $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$, причем или $R(x) = 0$ или $\deg R(x) < \deg Q(x)$.

Наибольшим общим делителем двух многочленов, один из которых ненулевой, называют многочлен наибольшей степени, делящий оба этих многочлена. НОД определен с точностью до умножения на константу.

2.1. Найдите все натуральные n, при которых число $3n^3 + 2n^2 + 3n + 4$ делится на число $n^2 + 1$.

2.2. Докажите, что деление многочленов с остатком всегда возможно. **2.3.** Докажите, что при делении с остатком, неполное частное и остаток определяются однозначно.

2.4. Докажите, что если все коэффициенты многочлена $P(x)$ – целые числа, и a и b – также целые, то число $(P(a) - P(b))$ кратно $(a - b)$. **2.5.** Найдите НОД многочленов $x^4 - x^3 + 4x - 4$ и $x^3 + x^2 + x - 3$. См. задачу 2.7.

2.6. Докажите, что многочлены $x^3 - 2$ и $x^2 + 2x + 2$ взаимно просты. См. задачу 2.7.

2.7. Докажите, что в результате работы алгоритма Евклида с многочленами получится НОД двух многочленов.

2.8. Придумайте какие-нибудь многочлены f и g, такие, что $(x^3 - 2) \cdot f(x) + (x^2 + 2x + 2) \cdot g(x) = 1$ при всех x.

2.9. Докажите, что для любых двух многочленов P и Q существуют такие многочлены U и V, что НОД$(P, Q)= PU + QV$.

2.10. При делении многочлена $P(x)$ на $x^2 - 1$ был получен остаток $x - 1$, а при делении $Q(x)$ на $x^2 - 1$ был получен остаток $x + 1$. Найдите остаток при делении на $x^2 - 1$ многочленов $P(x) + Q(x)$; $P(x) \cdot Q(x)$.

2.11. Делится ли многочлен $x^{2008} + x^{11} + x^{17} - 3$ на $x^2 - 1$?

2.12. Придумайте два квадратных трехчлена, ни один из которых не делится на $x^2 - 3x + 2$, а их произведение делится на $x^2 - 3x + 2$.

Корни многочлена

Теорема 3 *Корнями квадратичного многочлена ax^2+bx+c ($a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$) являются числа*
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Число a называется *корнем* многочлена $P(x)$, если $P(a)=0$.

Теорема 4 (Безу) *Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен $P(a)$.*

Если многочлен делится на $(x-a)^k$, $k>1$, но не делится на $(x-a)^{k+1}$, то говорят, что его корень a имеет *кратность* k.

3.1. Докажите, что у ненулевого многочлена $P(x)$ количество корней не превосходит степень $\deg P(x)$.

3.2. Докажите, что если значения двух многочленов, степень каждого из которых не превосходит $n-1$, совпадают в n различных точках, то эти многочлены равны.

3.3. Найдите все корни многочленов $-3-x+3\,x^2+x^3$, $-1-3\,x+3\,x^2+x^3$.

3.4. Покажите, что корни многочлена $2008x^4+11x^2+3x+5$ не могут быть положительными.

3.5. (*Интерполяция многочленов*). **а**) Даны числа a_1, a_2, a_3. Докажите, что существует единственный многочлен f степени не больше 2, такой, что $P(1)=a_1$, $P(2)=a_2$, $P(3)=a_3$.

3.6. Многочлен $P(x)$ степени n принимает целые значения в точках $n+1$. Докажите, что многочлен $P(x)$ принимает целые значения во всех целых точках.

3.7. Докажите, что не существует многочлена $P(n)$ с целыми коэффициентами, значения которого при любом целом n простое.

3.8. Дан многочлен $P(n)$ с целыми коэффициентами и ненулевые целые числа a и b. Известно что для любого $n\in\mathbb{Z}$ число $P(n)$ делится на хотя бы одно из чисел a и b. Докажите, что или $P(n)\ \vdots\ a$ при всех $n\in\mathbb{Z}$, или $P(n)\ \vdots\ b$ при всех $n\in\mathbb{Z}$ **а**) если a и b взаимно просты; **б**) в общем случае.

3.9. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, где p и q — взаимно простые целые числа. Докажите, что **а**) старший коэффициент многочлена делится на q, а свободный член делится на p; **б**) многочлен можно представить в виде $P(x)=(qx-p)\cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — тоже многочлен с целыми коэффициентами.

3.10. Пусть $P(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, $P(\sqrt{2})=0$. Докажите, что $P(x)\ \vdots\ x^2-2$.

3.11. Можно ли многочлен а) x^2+1, б)x^4+1 разложить на множители с действительными коэффициентами?

3.12. Докажите, что все вещественные корни многочлена $nx^n-x^{n-1}-x^{n-2}\ldots-x^2-x-1$ по модулю не превосходят 1.

Теорема Виета

Теорема 5 (Виета для квадратного уравнения) *Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x_2+px+q=0$. Тогда справедливы равенства*
$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q.$$

4.1. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. Выразите через p и q следующие величины **а**) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; **б**) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$; **в**) $x_1^3+x_2^3$.

4.2. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$ является наибольшей? Чему равна эта сумма?

4.3. Пусть $P(x)=x^2+px+q$. При каких p и q выполняются равенства $P(p)=P(q)=0$?

4.4. У квадратного трехчлена $f(x)=x^2+ax+b$ два корня, один из них принадлежит промежутку $(0,1)$, а второй — не принадлежит этому промежутку. Докажите, что $f(b)\leqslant 0$.

Подстановки

5.1. Известно, что $P(Q(x))=Q(P(x))$. Докажите, что $P(P(x))-Q(Q(x))$ кратно $(P(x)-Q(x))$.

5.2. Многочлен $P(x^3)+Q(x^3)$ делится на многочлен x^2+x+1. Докажите, что многочлен $P(x)+Q(x)$ делится на многочлен $x-1$.

1. Миша решил уравнение $x^2+ax+b=0$ и сообщил Диме набор из четырех чисел — два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие — коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными? *(М.Евдокимов, 2000 г., 9 класс, 4-й этап)*

2. Приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами в трех последовательных целых точках принимает простые значения. Докажите, что он принимает простое значение по крайней мере еще в одной целой точке. *(Н.Агаханов, 2002 г., 9 класс, 4-й этап)*

3. Докажите, что стороны любого неравнобедренного треугольника можно либо все увеличить, либо все уменьшить на одну и ту же величину так, чтобы получился прямоугольный треугольник. *(В.Сендеров, 2003 г., 9 класс, 4-й этап)*

4. Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для любого натурального числа n, в десятичной записи которого участвуют одни единицы, число $P(n)$ также записывается одними единицами? *(А.Перлин, 1994 г., 9 класс, 4-й этап)*

5. Два многочлена $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ и $Q(x)=x^2+px+q$ принимают отрицательные значения на некотором интервале I длины более 2, а вне I — неотрицательны. Докажите, что найдется такая точка x_0, что $P(x_0)<Q(x_0)$.

6. Найдите все пары квадратных трехчленов x^2+ax+b, x^2+cx+d такие, что a и b — корни второго трехчлена, c и d — корни первого.

7. Корни двух приведенных квадратных трехчленов — отрицательные целые числа, причем один из этих корней — общий. Могут ли значения этих трехчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98? (И.Рубанов, 1998 г., 9 класс, 4-й этап)

Графы

Определение 5 *Графом называется множество точек (вершин), некоторые из которых соединены между собой линиями (ребрами).*

1.1. В соревнованиях «кто кого переговорит» с пятью участниками только Степа и Леша сыграли одинаковое число встреч, а все остальные — различное, причем никакие два участника не встречались друг с другом дважды. Сколько встреч сыграли они?

Степенью вершины называется количество ребер выходящих из нее. Вершина называется *четным*, если степень вершины четна, иначе вершина *нечетна*.

Теорема 6 *Число нечетных вершин любого графа четно.*

1.2. Можно ли придумать пять таких слов, чтобы каждое имело хотя бы одну общую букву ровно с тремя другими.

1.3. У Пети 5 друзей среди одноклассников. У остальных его одноклассников 4, 6 или 8 друзей. И только у новичка Саши всего один друг. Докажите, что Петя может отправить Саше записку, если каждый будет передавать записку одному из своих друзей.

1.4. В графе каждая вершина — синяя или зеленая. При этом каждая синяя вершина соединена с 3 синими и 6 зелеными, а каждая зеленая — с 5 синими и 4 зелеными. Какое наименьшее число вершин с такими условиями может быть?

1.5. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание было приглашено по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется врач, который в них работает. Сколько в городе поликлиник и сколько врачей принимало участие в совещании?

1.6. На листе бумаги отмечена 2005 точек. Двое играют в следующую игру: каждый своим ходом соединяет две отмеченные точки линией. Запрещается соединять пару точек повторно. Проигрывает тот, после чьего хода из любой точки можно пройти в любую другую, двигаясь от вершины к вершине по проведенным линиям. Кто выигрывает при правильной игре?

Деревья и прогулки по ним

Если считать, что из одной вершины графа можно перейти к другой только по ребрам, то естественно возникает понятие *пути* и *цикла*. Цикл — путь в котором никогда не возвращаются в предыдущую вершину, но вернуться начальную вершину. Вершина степени 1 называется висячей. Вершина степени 0 называется изолированной.

Определение 6 *Деревом называется связный граф без циклов. Если из любой вершины графа можно дойти до любой другой по некоторому пути, то такой граф называется связным.*

1.7. Докажите, что если в графе существует единственный маршрут из любой вершины в любую другую, то этот граф — дерево.

1.8. Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.

1.9. Докажите, что таких вершин по крайней мере две.

1.10. Докажите, что в дереве вершин на одну больше, чем ребер.

1.11. Все города Трапезундии (в том числе столица) соединены кольцевой железной дорогой. Кроме того, столица соединена отдельными линиями с каждым из городов, кроме соседей по кольцу. Правительство решило разделить железнодорожную сеть между двумя компаниями так, чтобы, пользуясь дорогами любой из компаний, можно было доехать от любого города до любого другого. Можно ли выполнить это решение?

1.12. На каждую общую сторону двух клеток шахматной доски положена спичка. Какое минимальное количество спичек придется убрать, чтобы из каждой клетки можно было дойти до каждой, не перепрыгивая через спички?

1.13. Ребра графа, степени всех вершин которого равны 5, раскрасили в три цвета так, что по ребрам каждого цвета можно от любой вершины дойти до любой другой. Каким могло быть число вершин этого графа?

1.14. В связном графе В вершин и Р ребер. Сколько ребер надо удалить, чтобы получить скелет этого графа?

1.15. Волейбольная сетка имеет размер 20 ячеек в высоту и 300 ячеек в длину. Хулиган Артем по одной разрезает веревочки сетки. Какое наибольшее число веревочек ему удастся разрезать до того, как сетка распадется на 2 куска?

1.16. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов покрасили в красный цвет — всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

Прогулки по произвольным графам

Определение 7 *Путь, проходящий по всем ребрам графа ровно один раз, называется эйлеровым путем. Эйлеров путь, начало и конец которого совпадают, называется эйлеровым циклом.*

1.17. Докажите, что если все вершины связного графа четные, то в нем существует эйлеров цикл (докажите сначала, что в нем есть хоть какой-нибудь цикл);

1.18. Докажите, что связный граф с двумя нечетными вершинами имеет эйлеров путь.

1.19. Город в плане выглядит как квадрат 3×3, каждая сторона квартала-квадратика — участок улицы длиной 100м (включая внешний контур квадрата). Какой наименьший путь придется проделать паровому катку, чтобы заасфальтировать все улицы?

1.20. В стране ОЗ пять городов. Каждые два города соединены друг с другом либо красной, либо синей дорогой так, что никакие три дороги не образуют треугольник одного цвета с вершинами в городах. Докажите, что можно, находясь в любой точке, обойти по красным дорогам все города и вернуться обратно, не проходя два раза по одной и той же дороге. Докажите, что то же самое справедливо для синих дорог.

1.21. Ожидая поезда в Ижевск, Аря и Ксюша вышли с вокзала, погуляли по Кирову, потом пообедали в кафе «Карабас-Барабас», после чего решили вернуться на вокзал, проходя только по тем улицам, по которым до этого уже проходили нечетное число раз. Докажите, что им это удастся.

1.22. Каждое из ребер полного графа с 9 вершинами покрашено в синий или красный цвет. Докажите, что либо есть четыре вершины, все ребра между которыми — синие, либо есть три вершины, все ребра между которыми — красные.

Теория чисел

Теорема 7 (Основная теорема арифметики.) *Любое натуральное число представимо в единственном виде*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n},$$

где $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ простые и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ натуральные числа.

1.1. Разложите на простые множители числа 111, 1 111, 11 111, 111 111, 1 111 111. Попробуйте 239.

1.2. Чтобы проверить является ли число 401 простым как много простых чисел нужно перебрать?

1.3. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

1.4. Докажите, что $x^2 = 3y^2$ не имеет нетривиальных (т.е. кроме нулевого) решений в целых числах.

1.5. Докажите, что $x(x-1) = 2y+1$ не имеет решений в $\mathbb{Z}$.

1.6. У натурального числа n ровно 100 различных делителей. Найдите их произведение.

1.7. Докажите, что все числа 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

Простые числа — непростые задачи

2.1. Верно ли, что многочлен $P(n) = n^2 + n + 41$ при всех n принимает только простые значения?

2.2. Докажите, что существуют сколь угодно много последовательных чисел, не содержащих простых.

2.3. Используя $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n} + \ldots)$, покажите, что если $2^n + 1$ — простое, то n является степенью 2.

Простые вида $2^{2^k} + 1$ называются *числами Ферма.*

2.4. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Общие делители

3.1. Если числа a и b имеют одинаковое множество делителей, то они совпадают.

Определение 8 *Если числа a и b не имеют общих делителей кроме 1, то они называются взаимно простыми.*

3.2. В чем различие между «a, b, c, d взаимно простые» и «a, b, c, d попарно взаимно простые»?

3.3. Докажите для любых натуральных $a > b$, что $(a, b) = (a, b-a)$.

3.4. Постройте алгоритм нахождения (a, b).

3.5. Как, зная (a, b) и ab, найти НОК (a, b)?

3.6. Найдите все $n \in \mathbb{N}$ для которых $n^3 - 3$ делится на $n - 1$.

3.7. Докажите, что при любом целом положительном n число $n^2 + 8n + 15$ не делится на $n + 4$.

3.8. Докажите, что равенство $(a, mn) = 1$ равносильно выполнению двух условий $(a, m) = 1$ и $(a, n) = 1$.

Сравнения по модулю

Определение 9 $a - b \,\vdots\, m \Leftrightarrow a = b + mt \Leftrightarrow$ *a и b имеют одинаковые остатки при делении на m. Во всех этих случаях говорят «a сравнимо с b по модулю m».*

Это отношение обозначают через $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \equiv_m b$.

4.1. Если $a \equiv_m b$ и $c \equiv_m d$, то

1) $a + c \equiv_m b + d$;
2) $na \equiv_m nb$;
3) $a - c \equiv_m b - d$;
4) $a \cdot c \equiv_m b \cdot d$;
5) $a^n \equiv_m b^n$;

4.2. Когда из $an \equiv_m bn$ следует $a \equiv_m b$?

4.3. Теперь меняем модуль.

6) $an \equiv_{mn} bn$;
7) из $an \equiv_{mn} bn$ следует $a \equiv_m b$;
8) из $a \equiv_{mn} b$ следует $a \equiv_m b$;
9) из $an \equiv_{mn} b$ следует $b \,\vdots\, n$;
10) из $a \equiv_m b$ следует $(a, m) = (b, m)$.

Определение 10 *Целые числа распадаются на m классов (множества, которые не пересекаются, и в объединении дают все целые числа). Эти классы называются* классами вычетов *и обозначаются через $\mathbb{Z}_m$.*

Для обозначения класса, обычно, используют одно из чисел $0, 1, \ldots, m-1$ этого класса. Тогда получается странная арифметика

$$2 + 2 \equiv_3 1$$

4.4. Поупражняйтесь:

$$\begin{array}{lll} 2+5 \equiv_7 ?, & 3^2+2 \equiv_{10} ?, & 3^{2008} \equiv_{10} ?, \\ 5^{2008} \equiv_8 ?, & 2^{2008} \equiv_{17} ?, & 2^{2008} \equiv_{17} ?, \\ 2^{2^{1959}} - 1 \vdots\, 3, & 1^{1999} + 2^{1999} + \ldots + 16^{1999} \vdots\, 17. & \end{array}$$

4.5. Докажите, что n^2 сравнимо либо с 0, либо с 1 по модулю 4.

4.6. Докажите, если $x^2 + y^2 = z^2$ и z — нечетно, то x или y кратно 4.

4.7. Докажите, что $4x + 3 = y^2$ не имеет решений.

4.8. Докажите, что $3x - 1 = y^2$ не имеет решений.

Линейные диофантовы уравнения

5.1. Покажите, что если $(a, b) \nmid c$, то уравнение $ax + by = c$ не имеет решений.

5.2. Покажите, что если $c \,\vdots\, (a, b)$, то уравнение $ax + by = c$ равносильно другому уравнению $\frac{a}{(a,b)}x + \frac{b}{(a,b)}y = \frac{c}{(a,b)}$.

5.3. Покажите, что $(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}) = 1$.

5.4. Покажите, что если $(a, b) = 1$, и (x_0, y_0) решение $ax+by = 1$, то (cx_0, cy_0) решение $ax + by = c$.

5.5. Покажите, что если $(a, b) = 1$, и (x_c, y_c) решение $ax+by = c$, то $(x_c/c, y_c/c)$ — целые числа и являются решениями $ax + by = c$.

5.6. Если $(a, b) = 1$ и (x_0, y_0) частное решение $ax+by = 1$, то все решения этого уравнения это множество $\{(x_0 + bt, y_0 - at) | t \in \mathbb{Z}\}$.

5.7. Решите уравнения в целых числах:

$$\begin{array}{ll} 2x+3y=1; & 6x+7y=1; \\ 6x+3y=3; & 6x+9y=2; \\ 3x+5y=7; & 21x+48y=6; \\ 1990x-173y=11; & 45x-37y=25; \\ 109x+89y=1; & 43x+13y=21; \\ 34x-21y=1; & 10x+2y+18z=7; \end{array}$$

5.8. Хулиганы В. и П. порвали стенгазету, причем П. рвал каждый кусок на 5 частей, а В. на 9. При попытке собрать стенгазету нашли 1988 обрывков. Докажите, что нашли не все кусочки.

Теорема Эйлера и Ферма

6.1. Выпишите элементы $\mathbb{Z}_6$ взаимно простые с 6.

6.2. Выпишите элементы $\mathbb{Z}_8$ взаимно простые с 8.

Определение 11 *Такие элементы называются приведенной системой вычетов по модулю m.*

Количество элементов $\mathbb{Z}_m$ взаимно простые с m обозначается через $\varphi(m)$ — функция Эйлера.

6.3. Докажите, что если $n_1, n_2, \ldots, n_{\varphi(m)}$ — приведенная система вычетов по модулю m и $(a, m) = 1$, то $an_1, an_2, \ldots, an_{\varphi(m)}$ — также приведенная система вычетов по модулю m.

6.4. Докажите, что если $(a, m) = 1$, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv_m 1.$$

6.5. Пусть p — простое число. Найдите $\varphi(p)$.

6.6. Пусть p — простое число. Найдите $\varphi(p^\alpha)$.

6.7. Докажите (это не просто!), что

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_n^{\alpha_n} - p_n^{\alpha_n - 1}).$$

6.8. Теорема Эйлера. Если $(a, m) = 1$, то

$$a^{\varphi(m)} \equiv_m 1.$$

6.9. Устно докажите малую **теорему Ферма:** если p — простое и $(a, p) = 1$, то

$$a^{p-1} \equiv_p 1.$$

6.10. Найдите остаток от деления 2^{100} на 101.

6.11. Найдите остаток от деления 8^{900} на 29.

6.12. Пусть p — простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv_p a^p + b^p$ для любых целых a и b.

6.13. Пусть p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv_{pq} p + q$.

6.14. Пусть p — простое число, и a не делится на p. Докажите, что найдется натуральное число b, для которого $ab \equiv_p 1$.

6.15. Пусть для простого числа $p > 2$ и целого a, не делящегося на p, выполнено сравнение $x^2 \equiv_p a$. Докажите, что $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p 1$.

6.16. Пусть n — натуральное число, не кратное 17. Докажите, что либо n^8+1, либо n^8-1 кратно 17.

6.17. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если $(a,561)=1$, то выполняется сравнение $a^{560} \equiv_{561} 1$. Числа, обладающие этим свойством, называются числами Кармайкла.

6.18. Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится на 101.

6.19. Пусть $(m,n)=1$. Докажите, что сумма длин периода и предпериода десятичного представления дроби m/n не превосходит $\varphi(n)$.

Разнобой

7.1. Докажите, что для любого числа d, не делящегося на 2 и на 5, найдется число, в десятичной записи которого содержатся одни единицы и которое делится на d.

7.2. Из двухсот чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 199, 200 произвольно выбрали сто одно число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

7.3. Существует ли такая окружность, на которой имеется ровно одна точка с целыми координатами?

7.4. Последовательность $\{x_n\}$ устроена следующим образом: $x_1 = 3^{2001}$, а каждый следующий член равен сумме цифр предыдущего. Найдите x_5.

7.5. Докажите, что число

$$100\ldots00500\ldots001$$

(в каждой из двух групп по 100 нулей) не является кубом целого числа.

7.6. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна.

7.7. Тождество Гаусса. Докажите равенство

$$\sum_{d|n} \varphi(n) = n,$$

где знак $d \mid n$ означает, что суммирование идет по всем делителям числа n.

7.8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляются всевозможные семизначные числа, в записи которых каждая из этих цифр встречается ровно один раз. Доказать, что сумма всех таких чисел делится на 9.

7.9. Пусть $S(x)$ — сумма цифр натурального числа x. Решите уравнение:

$$x + S(x) = 2001.$$

7.10. Найдите какое-нибудь натуральное число A, такое что если приписать его к самому себе справа, то полученное число будет полным квадратом.

Учебно-тренировочные сборы
Заключительная олимпиада

1. Найдите все натуральные m такие, что число m^2+2 записывается одними шестерками.

2. Числа a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажите, что $a^4+a^2b^2+b^4 > \frac{3}{4}c^4$.

3. Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2+bx+c$ (a, b, c — целые, c — нечетное) имеет целые корни. Может ли $P(1997)$ быть нечетным числом?

4. Через вершину A треугольника ABC и основание биссектрисы угла A проведена окружность S, пересекающая стороны AC и AB в точках K и L. Докажите, что если $KL||CB$, то S касается BC.

5. В стране N города соединены между собой авиалиниями, причем перелеты осуществляются только в одном направлении. Известно, что выполняется условие: вылетев из любого города, нельзя вернуться в него, пользуясь этими авиалиниями. Докажите, что можно дополнить систему авиалиний так, чтобы каждый город был соединен авиалинией с каждым, и при этом новая система авиалиний удовлетворяла этому условию.

Решения

1. Ответ: $m = 2$, $m = 8$.

Числа, записываемые одной и двумя цифрами 6 представимы в указанном виде: $2^2 + 2 = 6$, $8^2 + 2 = 66$. Если же число $m^2 + 2$ содержит не менее трех цифр 6, то m^2 оканчивается на 664, то есть является числом, делящимся на 8. Отсюда следует, что m делится на 4, значит, m^2 делится на 16. Но числа 664 и $\overline{666 * \ldots * 6664}$ на 16 не делятся.

2. Из Теоремы Пифагора следует, что $c^2 = a^2+b^2$. Следовательно, $c^4 = a^4+2a^2b^2+b^4$. Тогда доказываемое неравенство принимает вид $a^4 - 4a^2b^2 + b^4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geqslant 0$.

3. Ответ: нет. Пусть x_1 и x_2 — корни $P(x)$. Тогда по теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, то есть a, x_1, x_2 — нечетные. По теореме Виета $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, то есть b — четное число. Тогда $P(1997) = a\cdot 1997^2 + b\cdot 1997+c$ — сумма двух нечетных и одного четного числа, то есть четно.

4. В треугольнике ABC угол C — прямой, CD — высота. Биссектрисы углов ABC и ACD пересекаются в точке M, а биссектрисы углов BAC и BCD — в точке N. Докажите, что длина отрезка MN равна радиусу вписанной в треугольник ABC окружности.

5. Покажем, что если существующая система авиалиний удовлетворяет условию, и два города A и B не соединены авиалинией, то тогда можно их соединить авиалинией $A \to B$ или $B \to A$ так чтобы получившаяся система авиалиний по-прежнему удовлетворяла условию.

Предположим противное. Тогда после проведения авиалинии $A \to B$ появился замкнутый путь $B \to C_1 \to \ldots C_n \to A \to B$. Аналогично, после проведения авиалинии $B \to A$ появился замкнутый путь $A \to D_1 \to \ldots D_m \to B \to A$. Но тогда после проведения авиалинии между A и B уже существовал замкнутый путь $A \to D_1 \to \ldots D_m \to B \to C_1 \to \ldots C_n \to A$ (возможно, некоторые вершины совпадают), то есть существующая система авиалиний не удовлетворяла условию, так как из A можно было вылететь и вернуться обратно.