Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 514.752.437

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ МИНИМАЛЬНЫХ ТОРОВ В $\mathbb{R}^3$ С ПЛОСКИМИ КОНЦАМИ

Э. И. Шамаев

Аннотация: Построены новые примеры полных минимальных торов в трехмерном евклидовом пространстве со сколь угодно большим четным числом плоских концов.

Ключевые слова: минимальные поверхности, уиллморовские поверхности, суперминимальные поверхности.

§ 1. Введение

В статье построены полные минимальные погружения торов в $\mathbb{R}^3$ с произвольным четным числом $n \geq 6$ выколотых точек. В окрестности выколотых точек тор асимптотически выглядит как плоскость. Поверхность с таким поведением в окрестности выколотых точек называется *поверхностью с плоскими концами.*

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Для любого четного $n \geq 6$ существует полное минимальное погружение тора в $\mathbb{R}^3$ с n плоскими концами.*

Априори построенные торы могут иметь точки ветвления, в которых индуцированная метрика вырождается. Для малого числа концов ($n = 6, 8, 10$) к настоящему времени удалось строго доказать, что существуют торы без таких точек [1], хотя, по-видимому, это верно для произвольного четного n.

Изучение минимальных поверхностей с плоскими концами было инициировано Брайантом. В его работе [2] показано, что минимальные поверхности с плоскими концами под действием инверсии переходят в уиллморовские поверхности, т. е. в экстремали функционала Уиллмора

$$W(\Sigma) = \int\limits_{\Sigma} \left(H^2 - K\right) d\sigma,$$

где H и K — средняя и гауссова кривизны, $d\sigma$ — элемент площади поверхности Σ. При этом плоские концы переходят в кратную точку поверхности и значение функционала Уиллмора равно $4\pi n$, где n — кратность точки (или число плоских концов). Брайант показал, что так получаются все уиллморовские сферы.

Минимальная сфера с одним плоским концом ($n = 1$) — это стандартная плоскость. В [3] Брайант доказал, что не существует минимальных сфер с плоскими концами для $n = 2, 3, 5, 7$. В [4] Пенг построил примеры минимальных сфер с n плоскими концами для четных $n \geq 4$ и для нечетных $n \geq 9$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00403).

В случае торов образы минимальных поверхностей с плоскими концами задают класс суперминимальных уиллморовских торов, а другие уиллморовские торы описываются с помощью решений 4-частичных уравнений Тода (см., например, [5]).

При $n = 1, 2$ минимальных торов не существует по очевидным соображениям. Куснер и Шмитт [6] показали, что не существует полных минимальных торов с тремя плоскими концами. Полный минимальный тор с четырьмя плоскими концами в $\mathbb{R}^3$ был построен Костой в [7], Куснером и Шмиттом в [6]. Нами построен пример тора с шестью плоскими концами [1].

Вкратце изложим нашу конструкцию. Рассмотрим риманову поверхность Γ рода 1, заданную в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = P(z) = 4(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3), \quad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Пусть γ_1 и γ_2 — образующие $\pi_1(\Gamma)$.

Минимальные погружения $\Phi : \Gamma \to \mathbb{R}^3$ мы задаем с помощью представления Вейерштрасса [8]:

$$\Phi(T) = \operatorname{Re} \int_{T_0}^{T} \big(\psi_1^2 - \psi_2^2, i\big(\psi_1^2 + \psi_2^2\big), 2\psi_1\psi_2\big) \frac{dz}{w}, \tag{2}$$

где $T_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка, ψ_1^2, ψ_2^2 и $\psi_1\psi_2$ — мероморфные функции на Γ. Следовательно, на универсальной накрывающей $\upsilon : \Upsilon \to \Gamma$ для $\gamma : [0, 1] \to \Upsilon$ таких, что $\upsilon(\gamma)$ гомотопически эквивалентна γ_1 или γ_2, справедливы равенства

$$\psi_1(\gamma(0)) = \varepsilon(\gamma)\psi_1(\gamma(1)), \quad \psi_2(\gamma(0)) = \varepsilon(\gamma)\psi_2(\gamma(1)), \quad \varepsilon(\gamma) = \pm 1.$$

Тогда ψ_1 и ψ_2 являются сечениями так называемой спин-структуры на торе. В нашей конструкции $\varepsilon(\gamma_1)$ и $\varepsilon(\gamma_2)$ равны 1, т. е. ψ_1 и ψ_2 — мероморфные функции, а (2) не может быть вложением [6].

Для того чтобы отображение Φ задавало минимальную поверхность с плоскими концами, необходимо, чтобы каждый полюс дифференциалов

$$\psi_1^2 \frac{dz}{w}, \quad \psi_2^2 \frac{dz}{w}, \quad \psi_1\psi_2 \frac{dz}{w}$$

был *второго* порядка с *нулевыми вычетами* [6].

Кроме того, для корректного определения Φ необходимо, чтобы следующие интегралы (*периоды*) были нулевыми:

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_i} \big(\psi_1^2 - \psi_2^2\big) \frac{dz}{w} = 0, \quad \operatorname{Im} \int_{\gamma_i} \big(\psi_1^2 + \psi_2^2\big) \frac{dz}{w} = 0, \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma_i} 2\psi_1\psi_2 \frac{dz}{w} = 0, \tag{3}$$

где $i = 1, 2$.

В нашей конструкции функции ψ_1 и ψ_2 имеют вид

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i w}{z - p_i}, \quad \psi_2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j w}{z - p_j}, \tag{4}$$

где $m \geq 4$ — целое число, $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$ и $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ попарно различны. Несложно проверить, что функции ψ_1 и ψ_2 имеют полюсы первого порядка в точках ветвления

$$P_0 = (\infty, \infty), \quad P_1 = (p_1, 0), \quad P_2 = (p_2, 0), \quad P_3 = (p_3, 0)$$

и в точках

$$P_j^- = (p_j, -\sqrt{P(p_j)}), \quad P_j^+ = (p_j, \sqrt{P(p_j)}), \quad j = 4, \dots, m.$$

Определим пространство $V(p) = V(p_1, \dots, p_m)$ функций вида (4)

$$V(p) = \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i w}{z - p_i} \mid (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \ker M \subset \mathbb{C}^m \right\},$$

где матрица

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4 - p_1} & \frac{1}{p_4 - p_2} & \frac{1}{p_4 - p_3} & \frac{P'(p_4)}{4P(p_4)} & \frac{1}{p_4 - p_5} & \dots & \frac{1}{p_4 - p_m} \\ \frac{1}{p_5 - p_1} & \frac{1}{p_5 - p_2} & \frac{1}{p_5 - p_3} & \frac{1}{p_5 - p_4} & \frac{P'(p_5)}{4P(p_5)} & \dots & \frac{1}{p_5 - p_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_m - p_1} & \frac{1}{p_m - p_2} & \frac{1}{p_m - p_3} & \frac{1}{p_m - p_4} & \frac{1}{p_m - p_5} & \dots & \frac{P'(p_m)}{4P(p_m)} \end{pmatrix}$$

действует на вектор-столбец умножением слева.

Справедливо

Предложение 1. 1. *Для функций $\psi_1, \psi_2 \in V(p)$ имеет место равенство*

$$\operatorname{res}_Q \frac{\psi_1 \psi_2 dz}{w} = 0,$$

где $Q = P_0, \dots, P_3, P_4^{\pm}, \dots, P_m^{\pm}$.

2. *Для почти всех $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ таких, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, справедливо равенство*

$$\dim_{\mathbb{C}} V(p) = 3.$$

Таким образом, представление Вейерштрасса (2) для $\psi_1, \psi_2 \in V(p)$ задает минимальную поверхность с плоскими концами.

Теперь необходимо выбрать ψ_1 и ψ_2 из $V(p)$ так, чтобы были выполнены шесть вещественных уравнений (3). При этом мы имеем шесть свободных комплексных параметров (так как ψ_1, $\psi_2 \in V(p)$ и по предложению 1 $\dim_{\mathbb{C}} V(p) = 3$).

Ключевую роль при решении уравнений (3) играет

Предложение 2. *Существуют симметрические билинейные формы*

$$A : V(p) \times V(p) \to \mathbb{C}, \quad B(p) : V(p) \times V(p) \to \mathbb{C}$$

такие, что

$$-\eta_k A\big(\psi_1, \psi_2\big) + \omega_k B(p; \psi_1, \psi_2) = \frac{1}{8} \int\limits_{\gamma_k} \psi_1 \psi_2 \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2, \tag{5}$$

где

$$\eta_k = -\frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{z dz}{w}, \quad \omega_k = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2.$$

Форма A не зависит от $p_1, \dots, p_m$ и является положительно определенной на $V(p)$.

Под положительной определенностью формы A мы понимаем следующее:

$$A(\psi, \psi) > 0 \text{ для } \psi = \sum_{i=1}^m \frac{\nu_i w}{z - p_i} \in V(p), \quad \big(\nu_1, \dots, \nu_m\big) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Из положительной определенности A вытекает, что в пространстве $V(p)$ можно выбрать базис ξ_1, ξ_2, ξ_3, в котором A задается единичной матрицей, а $B(p)$ диагональна. Таким образом, имеет место

Лемма 1. *Существует базис ξ_1, ξ_2, ξ_3 в пространстве $V(p)$ такой, что*

$$\int\limits_{\gamma} \xi_i \xi_j \frac{dz}{w} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 3,$$

для $i \neq j$ и $\gamma = \gamma_1, \gamma_2$.

Существование такого базиса позволяет разрешить задачу равенства нулю периодов (3) в явном виде.

Для

$$(p_1, \dots, p_m) = \begin{cases} \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m-1}{2} + t\right) & \text{при } m \text{ нечетном}, \\ \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m}{2}, 1+t\right) & \text{при } m \text{ четном} \end{cases}$$

при достаточно малых $t \in \mathbb{R}$ справедливо

Предложение 3. *Положим*

$$\psi_1 = v(r,s)\xi_1 + \xi_2, \quad \psi_2 = x(r,s)\xi_1 + y(r,s)\xi_2 + u(r,s)\xi_3,$$

где

$$v(r,s) = \pm\sqrt{-\frac{1}{2c}(|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d \pm \sqrt{(|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d)^2 - 4|c|^2 d})}; \tag{6}$$

$$x(r,s) = \frac{-a_2 r - b_2 s}{v(r,s)}; \quad y(r,s) = a_1 r + b_1 s;$$

$$u(r,s) = \sqrt{\frac{1}{a_3}(a_1 \overline{v(r,s)}^2 - a_1 x^2(r,s) - a_2 y^2(r,s) + a_2)}; \tag{7}$$

$$a_k = \int\limits_{\gamma_1} \xi_k^2 \frac{dz}{w}, \quad b_k = \int\limits_{\gamma_2} \xi_k^2 \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2, 3; \tag{8}$$

$$c(r,s) = \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2 - (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_1 r + b_1 s)^2}{(a_1 b_3 + a_3 b_1)};$$

$$d(r,s) = -\frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{(a_1 b_3 + a_3 b_1)}(a_2 r + b_2 s)^2.$$

Тогда существует открытая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ такая, что для почти всех $(r,s) \in \Omega$ справедливы равенства (3).

Теорема 1 вытекает из предложений 1–3 и 5.

Таким образом, получаем двупараметрическое семейство торов с плоскими концами при фиксированных $p_1, \dots, p_m$.

У погружения (2) нет точек ветвления, если $(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)(T) \neq 0$ для всех $T \in \Gamma$. Это условие зависит от $m+2$ свободных параметров $r, s, p_1, \dots, p_m$, что делает неравенство очевидным для параметров в общем положении, но строгое доказательство этого утверждения технически сложно. Как упоминалось выше, мы можем показать это лишь для малых $n = 2m - 2$.

Автор благодарит профессора И. А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения и А. Е. Миронова за полезные обсуждения и советы.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Для любой функции $\psi \in V(p)$ имеют место равенства*

$$\mathrm{res}_Q \frac{\psi^2 dz}{w} = 0, \quad Q = P_0, \dots, P_3, P_4^{\pm}, \dots, P_m^{\pm}.$$

Размерность пространства $V(p)$ над $\mathbb{C}$ больше или равна 3.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию из $V(p)$:

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i}.$$

Определим на торе Γ голоморфную инволюцию $\sigma : (z, w) \mapsto (z, -w)$. Равенство нулю вычетов $\psi^2 dz/w$ в точках ветвления Γ следует из очевидного равенства

$$\sigma^*(\psi^2 dz/w) = -\psi^2 dz/w$$

и инвариантности точек $P_0, \dots, P_3$ относительно инволюции σ.

Выберем локальный параметр $q = z - p_k$ в окрестности точки P_k^+, $k = 4, \dots, m$. Обозначим $\sqrt{P(p_k)}$ через w_k, $\frac{dw}{dq}(p_k, w_k)$ — через w_k' для $k = 4, \dots, m$. Разложение в ряд Лорана дифференциала $\frac{\psi^2}{w} dq$ в окрестности P_k^+ имеет вид

$$\frac{\psi^2}{w} dq = \frac{\nu_k^2 w_k}{q^2}\, dq + \left(\frac{q^2 \psi^2}{w} \right)' \big(P_k^+\big) \frac{1}{q}\, dq + O(1)\, dq.$$

Следовательно, вычет в точке P_k^+ равен

$$\mathrm{res}_{P_k^+} \frac{\psi^2}{w} dq = \lim_{q \to 0} \frac{1}{w^2} ((q^2 \psi^2)' w - q^2 \psi^2 w'). \tag{9}$$

Очевидно, что

$$\lim_{q \to 0} q^2 \psi^2 w' = \nu_k^2 w_k^2 w_k'. \tag{10}$$

Используя равенство $(q^2\psi^2)' w = 2(q\psi)' q \psi w$, вычислим $(q\psi)'$:

$$\begin{aligned} (q\psi)'\big(P_k^+\big) &= \left(w \frac{\nu_k}{z - p_k}(z - p_k) + w \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \frac{\nu_i}{z - p_i}(z - p_k) \right) \big(P_k^+\big) \\ &= \nu_k w_k' + w_k \sum_{i=1, i \neq k}^{m} \frac{\nu_i}{p_k - p_i}. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получим

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{P_k^+} \frac{\psi^2}{w}\, dq &= \frac{1}{w_k^2} \left(2 \left(\nu_k w_k' + w_k \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \frac{\nu_i}{p_k - p_i} \right) \nu_k w_k^2 - \nu_k^2 w_k^2 w_k' \right) \\ &= 2\nu_k w_k \left(\frac{P'(p_k)}{4P(p_k)} \nu_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \frac{1}{p_k - p_i} \nu_i \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку на торе $w^2 = P(z)$ будет

$$\frac{w_k'}{2w_k} = \frac{P'(p_k)}{4P(p_k)}, \quad k = 4, \dots, m.$$

Поскольку условие $(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \ker M$ означает справедливость равенства

$$\frac{P'(p_k)}{4P(p_k)}\nu_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \frac{1}{p_k - p_i}\nu_i = 0, \quad k = 4, \dots, m,$$

из (12) следует, что $\operatorname{res}_{P_k^{\pm}} \frac{\psi^2 dz}{w} = 0$ для $\psi \in V(p)$, $k = 4, \dots, m$.

Таким образом, рассматриваемые 1-формы имеют нулевые вычеты в каждой точке $P_0, \dots, P_3, P_4^{\pm}, \dots, P_m^{\pm}$.

Ранг M не превосходит $m - 3$. Размерность пространства $V(p)$ равна $\dim_{\mathbb{C}} \ker M = m - \operatorname{rank} M \geq 3$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для почти всех точек $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ таких, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, матрица*

$$M_{4,\dots,m} = \begin{pmatrix} \frac{P'(p_4)}{4P(p_4)} & \frac{1}{p_4-p_5} & \dots & \frac{1}{p_4-p_m} \\ \frac{1}{p_5-p_4} & \frac{P'(p_5)}{4P(p_5)} & \dots & \frac{1}{p_5-p_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_m-p_4} & \frac{1}{p_m-p_5} & \dots & \frac{P'(p_m)}{4P(p_m)} \end{pmatrix}$$

невырожденна.

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = O(t)$ и

$$(p_1, \dots, p_m) = \begin{cases} \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m-1}{2} + t\right) & \text{при нечетном } m, \\ \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m}{2}, 1+t\right) & \text{при четном } m. \end{cases}$$

Тогда в случае нечетного m справедлива оценка определителя

$$t \det M_{4,\dots,m} = \begin{vmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = 1 + O(\varepsilon),$$

в случае четного m имеем другую оценку:

$$t \det M_{4,\dots,m} = \begin{vmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \frac{11}{24} \end{vmatrix} = \frac{11}{24} + O(\varepsilon)$$

при $t \to 0$. Следовательно, определитель $M_{4,\dots,m}$ является ненулевой рациональной функцией от $p_1, \dots, p_m$. Поскольку множество нулей рациональной функции имеет меру нуль, для почти всех $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ определитель $\det M_{4,\dots,m}$ отличен от нуля. Лемма 3 доказана.

Доказательство предложения 1. 1. Выберем произвольные $\psi_1, \psi_2 \in V(p)$. Тогда $\psi_1 - \psi_2$ и $\psi_1 + \psi_2$ принадлежат $V(p)$. По лемме 1 для вычетов в точках $P_0, \dots, P_3, P_4^{\pm}, \dots, P_m^{\pm}$ имеем

$$\operatorname{res}(\psi_1 + \psi_2)^2 \frac{dz}{w} = 0, \quad \operatorname{res}(\psi_1 - \psi_2)^2 \frac{dz}{w} = 0,$$

$$\operatorname{res} \frac{\psi_1\psi_2 dz}{w} = \frac{1}{4} \operatorname{res}((\psi_1+\psi_2)^2 - (\psi_1-\psi_2)^2)\frac{dz}{w} = 0.$$

2. По лемме 2 для почти всех точек $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ таких, что $p_1+p_2+p_3 = 0$, ранг M равен $m-3$. Следовательно, размерность пространства $V(p)$ равна $\dim_{\mathbb{C}} \ker M = m - \operatorname{rank} M = 3$.

Предложение доказано.

Доказательство предложения 2. Далее считаем, что $p_1+p_2+p_3 = 0$.

Представим Γ в виде склейки двух экземпляров плоскостей $\overline{\mathbb{C}}$ («нижний» и «верхний» листы) с разрезами вдоль отрезков $[p_1, p_2]$ и $[p_3, \infty]$. В этом представлении точкам (w, z) и $(-w, z)$ из Γ соответствуют точки z на «нижнем» и «верхнем» листах римановой поверхности. Пусть

$$\gamma_1 = \{(z,w) \in \Gamma \mid z \in [p_1, p_2]\}, \quad \gamma_2 = \{(z,w) \in \Gamma \mid z \in [p_2, p_3]\}.$$

Эти циклы γ_1 и γ_2 гомотопически эквивалентны нетривиальным циклам тора, показанным на рис. 1.

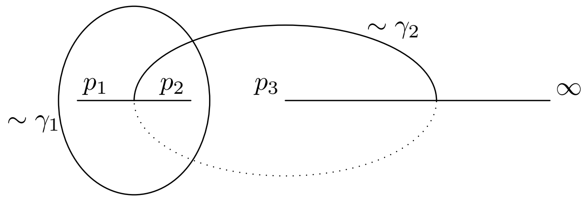

Рис. 1.

Точками обозначена часть цикла, расположенная на «нижнем» листе римановой поверхности, а сплошной линией — часть цикла на верхнем листе. Циклы γ_1 и γ_2 образуют базис в $H_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$.

Определим последовательность $\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{для } i = 1,2,3, \\ 1/2 & \text{для } i \geq 4. \end{cases}$

Лемма 4. *Для ψ_1, $\psi_2 \in V(p)$ справедливы равенства*

$$\int_{\gamma_k} \frac{\psi_1\psi_2}{w}\, dz = -8\left(\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i\beta_j + \sum_{i=1}^m \delta_i\alpha_i\beta_i\right)\eta_k + 8\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_i\beta_j(p_i+p_j) - \sum_{i=1}^m \delta_i\alpha_i\beta_i p_i\right)\omega_k, \quad k = 1,2,$$

где

$$\eta_k = -\frac{1}{2}\int_{\gamma_k} \frac{z\,dz}{w}, \quad \omega_k = \frac{1}{2}\int_{\gamma_k} \frac{dz}{w}, \quad k = 1,2.$$

Доказательство. Рассмотрим тор $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$ с локальным параметром u. На $\mathbb{T}$ существует единственная мероморфная функция с полюсом второго порядка в 0 со следующим разложением в окрестности нуля:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + o(u) + \dots.$$

Функция $\wp(u)$ называется *пе-функцией Вейерштрасса* [9].

Для $p_1+p_2+p_3=0$ отображение $\rho(u):\mathbb{T}\to\Gamma$, заданное формулой $\rho(u)=(\wp(u),\wp'(u))$, биголоморфно [9]. Поэтому справедливо равенство

$$(\wp'(u))^2=4(\wp(u)-p_1)(\wp(u)-p_2)(\wp(u)-p_3) \tag{13}$$

и ρ отображает точки 0, ω_1, ω_2 и $\omega_3=\omega_1+\omega_2$ на $P_0,\dots,P_3$ в некотором порядке.

Циклы $2\omega_1 t$ и $2\omega_2 t$, $t\in[0,1]$, составляют базис $H_1(\mathbb{T};\mathbb{Z})$. Тем самым образы этих циклов $\rho(2\omega_1 t)$ и $\rho(2\omega_2 t)$ гомотопически эквивалентны γ_1 и γ_2 соответственно [9].

Выберем $u_1,\dots,u_m$ такие, что

$$\rho(u_i)=(p_i,w_i),\quad i=1,\dots,m.$$

Тогда из (13) следует, что $\rho(-u_i)=(p_i,-w_i)$, $i=4,\dots,m$. Считаем, что $w_1=w_2=w_3=0$.

По предложению 1 дифференциал $\psi_1\psi_2 dz/w$ имеет полюсы только второго порядка без вычетов, поэтому $\psi_1\psi_2 dz/w$ является линейной комбинацией дифференциалов du, $\wp(u)du$, $\wp(u-u_1)du,\dots$, $\wp(u-u_m)du$, $\wp(u+u_4)du,\dots$, $\wp(u+u_m)du$.

Найдем эту линейную комбинацию. Заметим, что выполнено равенство $\rho^*(dz/w)=du$. Пусть

$$\alpha_0=\operatorname{res}_Q\frac{\psi_1}{w}\,dz,\quad \beta_0=\operatorname{res}_Q\frac{\psi_2}{w}\,dz$$

в точке $Q\in\{P_0,\dots,P_3,P_4^\pm,\dots,P_m^\pm\}$. Пусть $u_0\in\mathbb{T}$ такая, что $\rho(u_0)=Q$. Тогда по предложению 1

$$\rho^*\frac{\psi_1\psi_2}{w}\,dz=\frac{\alpha_0\beta_0}{(u-u_0)^2}du+O(1)\,du.$$

Из вида ψ_1 следует, что для вычетов $\psi_1 dz/w$ имеем

$$\operatorname{res}_{P_0}\frac{\psi_1}{w}\,dz=-2\sum_{i=1}^m\alpha_i,\ \operatorname{res}_{P_1}\frac{\psi_1}{w}\,dz=2\alpha_1,\dots,\operatorname{res}_{P_3}\frac{\psi_1}{w}dz=2\alpha_3,$$

$$\operatorname{res}_{P_4^\pm}\frac{\psi_1}{w}\,dz=\alpha_4,\dots,\operatorname{res}_{P_m^\pm}\frac{\psi_1}{w}\,dz=\alpha_m.$$

Аналогично вычисляются вычеты $\psi_2 dz/w$.

Таким образом, искомая линейная комбинация $\rho^*\frac{\psi_1\psi_2}{w}\,dz$ равна

$$\Bigg(4\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\alpha_i\beta_j\wp(u)+4\sum_{i=1}^3\alpha_i\beta_i\wp(u-u_i)+\sum_{i=4}^m\alpha_i\beta_i(\wp(u-u_i)+\wp(u+u_i))+c_0\Bigg)\,du.$$

Определим константу c_0 из поведения 1-форм около $\rho(0)=\infty$.

Найденная линейная комбинация для $\rho^*\frac{\psi_1\psi_2}{w}\,dz$ разлагается в окрестности 0 в следующий ряд:

$$4\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\alpha_i\beta_j\frac{du}{u^2}+\left(4\sum_{i=1}^m\delta_i\alpha_i\beta_i\wp(u_i)+c_0\right)du+O(u)\,du. \tag{14}$$

Выберем локальный параметр $q = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Тогда в окрестности ∞ имеем

$$(z, w) = \left(\frac{1}{q^2}, \frac{2}{q^3}\sqrt{(1-p_1q^2)(1-p_2q^2)(1-p_3q^2)}\right)$$

и

$$du = \frac{dz}{w} = -(1 + O(q))\,dq.$$

Чтобы выписать ряд Лорана дифференциала $\psi_1\psi_2 dz/w$ в точке ∞, воспользуемся асимптотикой:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i w}{z - p_i} = q^2 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (1 + p_i q^2 + O(q^4))$$

и

$$qw\,dq = \frac{1}{q^2}\sqrt{(1-p_1q^2)(1-p_2q^2)(1-p_3q^2)} = \frac{1}{q^2}(1 - (p_1+p_2+p_3)q^2 + O(q^4)).$$

Поскольку $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, последнее выражение равно $\frac{1}{q^2} + O(q^2)$.

Выпишем разложение $\psi_1\psi_2 dz/w$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i w}{z-p_i} \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j w}{z-p_j}\frac{dz}{w} &= -4\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i}{1-p_iq^2}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{1-p_jq^2}\,qwdq \\ &= -4\left(\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_i\beta_j\frac{1}{q^2} + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(1+p_iq^2+O(q^4))\sum_{j=1}^{m}\beta_j(1+p_jq^2+O(q^4))\right)dq \\ &\quad + O(q)\,dq = -4\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_i\beta_j\frac{dq}{q^2} - 4\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_i\beta_j(p_i+p_j)dq + O(q)dq. \qquad (15)\end{aligned}$$

Приравнивая разложения (14) и (15) дифференциала $\psi_1\psi_2 dz/w$, находим c_0:

$$c_0 = 4\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j(p_i+p_j) - 4\sum_{i=1}^{m}\delta_i\alpha_i\beta_i p_i.$$

Из соотношений

$$\int_{\gamma_k}\wp(u-u_i)\,du = \int_{\gamma_k}\wp(u)\,du = \int_{\gamma_k}\frac{zdz}{w} = -2\eta_k, \quad \int_{\gamma_k}du = 2\omega_k,$$

справедливых для $i = 1, \dots, m$ и $k = 1, 2$, получим утверждение леммы 4.

Продолжим доказательство предложения 2. Из леммы 4 следует, что A не зависит от выбора $p_1, \dots, p_m$. Квадратичные формы, соответствующие симметрическим билинейным формам A и $B(p)$, будем обозначать через A и $B(p)$. Выпишем эти матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1+\delta_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\delta_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\delta_m \end{pmatrix},$$

$$B(p)=\begin{pmatrix}(2-\delta_1)p_1 & p_2+p_1 & \dots & p_m+p_1\\ p_1+p_2 & (2-\delta_2)p_2 & \dots & p_m+p_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1+p_m & p_2+p_m & \dots & (2-\delta_m)p_m\end{pmatrix}.$$

Напомним, что *угловым минором* размера k матрицы называется определитель подматрицы, составленной из k верхних строк и k левых столбцов матрицы.

Пусть $m \geq 3$ — произвольное число. Угловые миноры размера $k = 1,2,3$ матрицы A равны 2, 3, 4 соответственно, т. е. положительны. Для каждого $k \geq 4$ угловой минор равен $2^{4-k}(k-1) > 0$. Это можно показать элементарными преобразованиями матрицы. Начиная с нижней строки вычитаем из каждой строки предыдущую. Завершим этот процесс на второй строке:

$$\begin{pmatrix}1+\delta_1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1+\delta_2 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1+\delta_k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1+\delta_1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ -\delta_1 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\delta_2 & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & -\delta_{k-2} & \delta_{k-1} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\delta_{k-1} & \delta_k\end{pmatrix}.$$

Далее, начнем с предпоследнего столбца новую серию преобразований: прибавляем к каждому столбцу предыдущий столбец. Завершим преобразования матрицы на четвертом столбце:

$$\begin{pmatrix}1+\delta_1 & 1 & 1 & k-3 & k-2 & \dots & 3 & 2 & 1\\ -\delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\delta_2 & \delta_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\delta_3 & \delta_4 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 & \ddots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_{k-2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{k-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_k\end{pmatrix}.$$

Теперь достаточно прибавить к третьему столбцу удвоенный четвертый столбец, чтобы подматрица распалась. Дополнение к угловому минору размера 3 диагонально и определитель равен $\frac{1}{2^{k-3}}$, а определитель углового минора размера 3 равен $2(k-1)$. Следовательно, угловой минор размера $k \geq 4$ равен $2^{4-k}(k-1)$.

Из положительности всех угловых миноров A по критерию Сильвестра получаем, что квадратичная форма A положительно определена. Предложение доказано.

Выпишем матрицы Грама — Шмидта относительно базиса ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$(A(\xi_i,\xi_j))_{3\times 3} = (\delta_{ij}), \tag{16}$$

$$(B(\xi_i,\xi_j))_{3\times 3} = (\mu_i\delta_{ij}), \tag{17}$$

где $\mu_1,\mu_2,\mu_3 \in \mathbb{R}$. Для каждого $p = (p_1,\dots,p_m)$ числа μ_1,μ_2,μ_3 определены с точностью до перестановки.

Предложение 4. *Существует однопараметрическое семейство торов* $\Gamma(p_t)$ *такое, что периоды*

$$\int\limits_\gamma \xi_1^2 \frac{dz}{w}, \quad \int\limits_\gamma \xi_2^2 \frac{dz}{w}, \quad \int\limits_\gamma \xi_3^2 \frac{dz}{w}$$

попарно различны при $\gamma = \gamma_1, \gamma_2$.

Доказательство. Пусть

$$(p_1, \dots, p_m) = \begin{cases} \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m-1}{2} + t\right) & \text{при } m \text{ нечетном}, \\ \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m}{2}, 1+t\right) & \text{при } m \text{ четном}, \end{cases}$$

где $t \in [0, 1)$.

Пусть

$$\zeta_k(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\delta_{ik}}{z - p_i} + \sum_{j=4}^{m} \frac{\zeta_k^i(t)}{z - p_j(t)}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где δ_{nk} — символ Кронекера и

$$\begin{pmatrix} \zeta_k^4(t) \\ \dots \\ \zeta_k^m(t) \end{pmatrix} = -M_{4,\dots,m}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t) - p_k} \\ \dots \\ \frac{1}{p_m(t) - p_k} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$M \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \delta_{3k} \\ \zeta_k^4(t) \\ \dots \\ \zeta_k^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t) - p_k} \\ \dots \\ \frac{1}{p_m(t) - p_k} \end{pmatrix} + M_{4,\dots,m}(t) \begin{pmatrix} \zeta_k^4(t) \\ \dots \\ \zeta_k^m(t) \end{pmatrix},$$

семейство функций $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$, $\zeta_3(t)$ является базисом $V(p_t)$.

Положим

$$\zeta_k(0) = \begin{cases} \frac{1}{z - p_k} & \text{при нечетных } m, \\ \frac{1}{z - p_k} + \frac{4\delta_{3k}}{z - p_m} & \text{при четных } m, \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3.$$

Лемма 5. *Существует достаточно малое* $T > 0$ *такое, что функции* $\zeta_k^i(t) : [0, T) \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, $i = 4, \dots, m$, *определены и непрерывны.*

Доказательство. Поскольку

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - p_1} + \frac{1}{z - p_2} + \frac{1}{z - p_3}$$

и

$$p_i - p_j = \begin{cases} O(t) & \text{при } \{i, j\} = \{2k, 2k+1\} \text{ для некоторого } k \geq 2, \\ O(1) & \text{иначе}, \end{cases}$$

то для m нечетных

$$tM_{4,\dots,m}(t) = \begin{pmatrix} \frac{P'(p_4)}{4P(p_4)} & \frac{1}{p_4 - p_5} & \dots & \frac{1}{p_4 - p_m} \\ \frac{1}{p_5 - p_4} & \frac{P'(p_5)}{4P(p_5)} & \dots & \frac{1}{p_5 - p_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_m - p_4} & \frac{1}{p_m - p_5} & \dots & \frac{P'(p_m)}{4P(p_m)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

и для m четных

$$tM_{4,\dots,m}(t) \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \frac{1}{4}+\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $\varepsilon = O(t)$.

Теперь очевидно, что при достаточно малом T для всех $t \in (0, T)$ величина $|\det tM_{4,\dots,m}(t)|$ больше $c_1 = 1/8$, а абсолютные значения элементов матрицы $tM_{4,\dots,m}(t)$ меньше или равны $c_2 = 1$. Поскольку элемент обратной матрицы равен отношению алгебраического дополнения и определителя матрицы, обратные матрицы $(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}$ существуют и абсолютные значения элементов $(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}$ меньше $(m-1)!c_2^{m-1}/c_1 = 8(m-1)!$ для $t \in (0, T)$.

Непрерывность $\zeta_1^i(t)$, $\zeta_2^i(t)$, $\zeta_3^i(t)$, $i = 4, \dots, m$, на $(0, T)$ очевидна. Покажем непрерывность справа в точке 0.

Для m нечетного векторы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t)-p_1} \\ \frac{1}{p_5(t)-p_1} \\ \dots \\ \frac{1}{p_{m-1}(t)-p_1} \\ \frac{1}{p_m(t)-p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3+t} \\ \dots \\ \frac{2}{m+1} \\ \frac{2}{m+1+2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t)-p_2} \\ \frac{1}{p_5(t)-p_2} \\ \dots \\ \frac{1}{p_{m-1}(t)-p_2} \\ \frac{1}{p_m(t)-p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2+t} \\ \dots \\ \frac{2}{m-1} \\ \frac{2}{m-1+2t} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t)-p_3} \\ \frac{1}{p_5(t)-p_3} \\ \dots \\ \frac{1}{p_{m-1}(t)-p_3} \\ \frac{1}{p_m(t)-p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+t} \\ \dots \\ \frac{2}{m-3} \\ \frac{2}{m-3+2t} \end{pmatrix}$$

ограничены. Следовательно, в этом случае предел $\lim\limits_{t\to+0} t(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}$ равен нулевой матрице и справедливы равенства

$$\lim_{t\to+0} \zeta_1(t) = \zeta_1(0), \quad \lim_{t\to+0} \zeta_2(t) = \zeta_2(0), \quad \lim_{t\to+0} \zeta_3(t) = \zeta_3(0).$$

Для m четного все координаты векторов (19), кроме координаты $\frac{1}{p_m(t)-p_3}$, ограничены. Следовательно,

$$\lim_{t\to+0} \zeta_1(t) = \zeta_1(0), \quad \lim_{t\to+0} \zeta_2(t) = \zeta_2(0).$$

Чтобы найти предел функции $\lim\limits_{t\to+0} \zeta_3(t)$, избавимся от неопределенности $0 \cdot \infty$ следующим образом:

$$-\lim_{t\to+0} t(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t)-p_3} \\ \frac{1}{p_5(t)-p_3} \\ \dots \\ \frac{1}{p_{m-1}(t)-p_3} \\ \frac{1}{p_m(t)-p_3} \end{pmatrix} = -\lim_{t\to+0} t\big(tM_{4,\dots,m}(t)\big)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+t} \\ \dots \\ \frac{2}{m-4} \\ 1/t \end{pmatrix}$$

$$= -\lim_{t\to+0}(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Обозначим $\lim\limits_{t\to+0}(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}$ через

$$\frac{1}{\det tM_{4,\dots,m}(t)}\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & C_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & C_{m-4}\\ \dots & \dots & \dots & C_{m-3}\end{pmatrix},$$

где C_j — алгебраические дополнения. Поскольку при $1\le j\le m-4$ все элементы последней строки подматрицы

$$C_j = (-1)^{j+m-3}\cdot\det\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon\\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & -1\\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon\end{pmatrix}$$

эквивалентны ε, то $\det C_j = \varepsilon$ при $t\to 0$.

Алгебраическое дополнение C_m эквивалентно

$$C_m = (-1)^{m-3+m-3}\cdot\det\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon\\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & -1\\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon\end{pmatrix} = 1+\varepsilon$$

при $t\to 0$. Из (18) следует, что $\det tM_{4,\dots,m}(t) = \frac{1}{4}+\varepsilon$ при $t\to 0$.

Таким образом,

$$\lim_{t\to+0}\big(tM_{4,\dots,m}(t)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & 4\end{pmatrix},$$

и $\zeta_3(0) = \lim\limits_{t\to+0}\zeta_3(t)$. Лемма доказана.

Доопределим $V(p_t)$ при $t=0$ как линейную оболочку $\zeta_1(0)$, $\zeta_2(0)$, $\zeta_3(0)$.

Теперь очевидно следующее утверждение.

Лемма 6. *Функции* $A(\zeta_i(t),\zeta_j(t))$, $B(p_t;\zeta_i(t),\zeta_j(t))$ *непрерывны при* $t\in[0,1)$ *для* $i,j\in\{1,2,3\}$.

Продолжим доказательство предложения 4. При нечетном m положим

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(-\zeta_1(0)+\zeta_2(0)+\zeta_3(0)),$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(\zeta_1(0)-\zeta_2(0)+\zeta_3(0)),\quad \xi_3 = \frac{1}{2}(\zeta_1(0)+\zeta_2(0)-\zeta_3(0)).$$

Легко проверить, что справедливы равенства

$$(a_{ij}) = (A(\xi_i,\xi_j)) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad (b_{ij}) = (B(p_0;\xi_i,\xi_j)) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, на Γ_0 имеем $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = -1$.

Пусть при m четном

$$\xi_1 = -\frac{\sqrt{39}}{78}(5\zeta_1(0) + 5\zeta_2(0) - 3\zeta_3(0)),\ \xi_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}(\zeta_1(0) - 2\zeta_2(0)),\ \xi_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_1(0).$$

Тогда матрица (a_{ij}) является единичной, а (b_{ij}) имеет характеристический полином $13\mu^3 - 12\mu^2 - 21\mu + 4$. Нули этого полинома равны μ_1, μ_2, μ_3. Легко проверить, что μ_1, μ_2, μ_3 попарно различны.

Таким образом, для всех m существует такой тор Γ_0, что числа μ_1, μ_2, μ_3 попарно различны. По лемме 6 элементы матрицы Грама — Шмидта (17) непрерывны на $[0, T)$. Поэтому числа μ_1, μ_2, μ_3 непрерывно зависят от t на $[0, T)$ как корни характеристического полинома матрицы Грама — Шмидта. Тем самым существует T' такое, что для $t \in [0, T')$ числа μ_1, μ_2, μ_3 попарно различны. Предложение 4 доказано.

Пусть

$$a_k = \int\limits_{\gamma_1} \xi_k^2 \frac{dz}{w}, \quad b_k = \int\limits_{\gamma_2} \xi_k^2 \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Равенства

$$a_k = \int\limits_{\gamma_1} \xi_k^2 \frac{dz}{w} = -8\eta_1 A(\xi_k, \xi_k) + 8\omega_1 B(\xi_k, \xi_k) = -8\eta_1 + 8\omega_1\mu_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$b_k = \int\limits_{\gamma_2} \xi_k^2 \frac{dz}{w} = -8\eta_2 A(\xi_k, \xi_k) + 8\omega_2 B(\xi_k, \xi_k) = -8\eta_2 + 8\omega_2\mu_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

вытекают из определения (5) и равенств (16), (17). Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} -\eta_1 & \omega_1 \\ -\eta_2 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Периоды $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ трудно оценить и тем более трудно вычислить. В следующей лемме приводим условия, которым удовлетворяют эти периоды.

Лемма 7. *Пусть тор Γ таков, что μ_1, μ_2, μ_3 различны. Тогда*

1) *периоды a_1, a_2, a_3 вещественные, а периоды b_1, b_2, b_3 мнимые;*

2) *периоды $\xi_k^2 dz/w$ по разным циклам не обращаются в нуль одновременно:*

$$|a_k| + |b_k| \neq 0, \quad k = 1, 2, 3;$$

3) *если и существует, то не более одной пары несовпадающих индексов $k, l \in \{1, 2, 3\}$ таких, что*

$$a_k b_l + a_l b_k = 0;$$

4) *если и существует, то не более одной пары несовпадающих индексов $k, l \in \{1, 2, 3\}$ таких, что*

$$a_k b_l - a_l b_k = 0;$$

5) *если и существует, то не более одного индекса $k \in \{1, 2, 3\}$ такого, что*

$$a_k = 0;$$

это утверждение также верно для $b_k = 0$;

6) *для различных* $k, l \in \{1, 2, 3\}$

$$|a_k b_l - a_l b_k| + |a_k b_l + a_l b_k| \neq 0.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим инволюцию $\tau : (z, w) \mapsto (\bar{z}, \overline{w})$. Для 1-форм $\varphi = dz/w$ и zdz/w справедливо равенство

$$\tau^* \varphi = \overline{\varphi}.$$

Тогда выполнены равенства

$$\int\limits_{\gamma_1} \varphi = \int\limits_{\tau\gamma_1} \varphi = \int\limits_{\tau\tau\gamma_1} \tau^* \varphi = \overline{\int\limits_{\gamma_1} \varphi}.$$

Первое равенство следует из $\gamma_1 = \tau\gamma_1$. Второе равенство верно для любых инволюций. Третье получаем из $\tau^*\varphi = \overline{\varphi}$.

Аналогично, но с учетом $\gamma_2 = -\tau\gamma_2$ вытекает следующее равенство:

$$\int\limits_{\gamma_2} \varphi = \int\limits_{-\tau\gamma_2} \varphi = \int\limits_{-\tau\tau\gamma_2} \tau^* \varphi = -\overline{\int\limits_{\gamma_2} \varphi}.$$

Значит, периоды ω_1 и η_1 — вещественные, а ω_2 и η_2 — чисто мнимые числа. Периоды a_k и b_k являются линейными комбинациями с вещественными коэффициентами ω_1, η_1 и ω_2, η_2 соответственно. Итак, первое утверждение леммы справедливо.

2. Поскольку по определению $a_k = -\eta_1 + \mu_k\omega_1$ и $b_k = -\eta_2 + \mu_k\omega_2$, то

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1 + \mu_k\omega_1 \\ -\eta_2 + \mu_k\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1 & \omega_1 \\ -\eta_2 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_k \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Квадратную матрицу в последнем выражении обозначим через Δ. Из равенства Лежандра $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$, выполненного на любом торе [9], следует, что $\det \Delta = -\eta_1\omega_2 + \eta_2\omega_1 \neq 0$. В силу линейной независимости столбцов Δ вектор $\begin{pmatrix} a_k & b_k \end{pmatrix}$ не может быть нулевым. Следовательно, второе утверждение леммы верно.

3. Из (21) вытекает равенство

$$a_l b_k + a_k b_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_l \end{pmatrix} \Delta^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_k \end{pmatrix},$$

где $k, l \in \{1, 2, 3\}$, поэтому

$$\begin{pmatrix} a_k b_l + a_l b_k \\ a_k b_j + a_j b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_l \\ 1 & \mu_j \end{pmatrix} \Delta^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_k \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mu_l \neq \mu_j$ и $\det \Delta \neq 0$, столбцы произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_l \\ 1 & \mu_j \end{pmatrix} \Delta^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta$$

линейно независимы и вектор $\begin{pmatrix} a_k b_l + a_l b_k & a_k b_j + a_j b_k \end{pmatrix}$ ненулевой.

Таким образом, мы показали справедливость третьего утверждения.

4. Четвертое утверждение доказывается аналогично третьему и следует из того, что

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & \mu_l \\ 1 & \mu_j \end{pmatrix} \Delta^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta \right] \neq 0.$$

5. Чтобы доказать пятое утверждение, рассмотрим a_k и a_l с различными индексами $k, l \in \{1,2,3\}$. Период ω_1 не равен 0.

Из равенства

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1 + \mu_k\omega_1 \\ -\eta_1 + \mu_l\omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_k \\ 1 & \mu_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

и $\mu_k \neq \mu_l$ вытекает пятое утверждение.

Заметим, что пятое утверждение также верно для b_k, $k = 1,2,3$.

6. Шестое утверждение следует из второго и пятого утверждений.

Лемма доказана.

Доказательство предложения 3. Далее считаем, что μ_1, μ_2, μ_3 различны. В предложении 4 показано существование таких торов.

Согласно лемме 7 перенумерацией ξ_1, ξ_2, ξ_3 можно добиться того, что $a_3 \neq 0$ и $a_1b_3 + a_3b_1 \neq 0$, поэтому далее считаем, что

$$a_3 \neq 0, \quad a_1b_3 + a_3b_1 \neq 0.$$

Отсутствие периодов. Условие отсутствия периодов

$$\operatorname{Re}\int_\gamma \psi_1\psi_2\frac{dz}{w} = 0, \quad \overline{\int_\gamma \psi_1^2\frac{dz}{w}} - \int_\gamma \psi_2^2\frac{dz}{w} = 0, \quad \gamma = \gamma_1, \gamma_2,$$

состоит из двух вещественных и двух комплексных уравнений.

В первую часть условия подставим ψ_1 и ψ_2:

$$\int_\gamma \psi_1\psi_2\frac{dz}{w} = \int_\gamma \bigl(vx\xi_1^2 + y\xi_2^2 + (vy+x)\xi_1\xi_2 + vu\xi_1\xi_3 + u\xi_2\xi_3\bigr)\frac{dz}{w}$$

$$= \int_\gamma \bigl(vx\xi_1^2 + y\xi_2^2\bigr)\frac{dz}{w} = \begin{cases} vxa_1 + ya_2 & \text{при } \gamma = \gamma_1, \\ vxb_1 + yb_2 & \text{при } \gamma = \gamma_2. \end{cases}$$

Справедливость второго равенства следует из леммы 1. Последнее равенство выполнено ввиду (20). По первому утверждению леммы 7 периоды

$$vxa_1 + ya_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1)s \in i\mathbb{R}, \quad vxb_1 + yb_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)r \in i\mathbb{R}$$

чисто мнимые, поэтому первая часть условия отсутствия периодов выполнена.

Вторая часть условия упрощается аналогично первой:

$$\overline{\int_\gamma \psi_1^2\frac{dz}{w}} - \int_\gamma \psi_2^2\frac{dz}{w} = \overline{\int_\gamma \bigl(v^2\xi_1^2 + \xi_2^2\bigr)\frac{dz}{w}} - \int_\gamma \bigl(x^2\xi_1^2 + y^2\xi_2^2 + u^2\xi_3^2\bigr)\frac{dz}{w}$$

$$= \begin{cases} \overline{v^2a_1 + a_2} - x^2a_1 - y^2a_2 - u^2a_3 & \text{при } \gamma = \gamma_1, \\ \overline{v^2b_1 + b_2} - x^2b_1 - y^2b_2 - u^2b_3 & \text{при } \gamma = \gamma_2. \end{cases}$$

Заметим, что по первому утверждению леммы 7 периоды a_1, a_2, a_3 вещественны. Выбор u в виде (7) обеспечивает обращение в нуль периодов по циклу γ_1. Покажем, что выбор v в виде (6) приводит к равенству нулю периодов по γ_2.

Из вида $v(r,s)$ заключаем, что v является корнем полинома

$$cv^4 + (|c|^2 + 2i\operatorname{Im} d)v^2 + \bar{c}d = 0.$$

Обозначим $|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d$ через α. Дискриминант этого полинома веществен:

$$\alpha^2 - 4|c|^2 d = |c|^4 + 4|c|^2 i \operatorname{Im} d - 4 \operatorname{Im}^2 d - 4|c|^2 d = |c|^4 - 4|c|^2 \operatorname{Re} d - 4 \operatorname{Im}^2 d \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что он положителен для (r, s) из некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Заметим, что $d(r, s)$, $c(r, s)$ и дискриминант непрерывно зависят от (r, s) на $\mathbb{R}^2$. Следовательно, достаточно указать точки в $\mathbb{R}^2$, где дискриминант положителен.

Если $a_2b_3 + a_3b_2 \neq 0$, то для $(r, s) = (0, 0)$ дискриминант положителен:

$$\left|\frac{a_2b_3 + a_3b_2}{a_1b_3 + a_3b_1}\right|^2 > 0.$$

Если $a_2b_3 + a_3b_2 = 0$, то при $s = 0$ дискриминант равен

$$a_1^4 r^6 \left|\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3 + a_3b_1}\right|^2 \left(a_1^4 \left(\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3 + a_3b_1}\right)^2 r^2 + 4a_2^2 \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_3 + a_3b_1}\right)$$

и неотрицателен для достаточно больших r. Следовательно, есть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, где дискриминант неотрицателен.

Теперь подставим в выражение периода $\overline{v^2b_1 + b_2} - x^2b_1 - y^2b_2 - u^2b_3$ значения u, x, y, умножим на a_3v^2 и сократим на $-(a_1b_3 + a_3b_1)$. Пусть $a_3v^2 \neq 0$. Очевидные вычисления показывают, что период $\overline{v^2b_1 + b_2} - x^2b_1 - y^2b_2 - u^2b_3$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\bar{v}^2v^2 + cv^2 + d = 0$.

Подставим (6) в $\bar{v}^2v^2 + cv^2 + d$. Для $(r, s) \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned}
\bar{v}^2v^2 + cv^2 + d &= \frac{1}{4|c|^2}(\overline{\alpha} \pm \sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d})(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d})\alpha^2 \\
&- \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d}) + d = \frac{1}{4|c|^2}(|c|^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d} - 2i \operatorname{Im} d) \\
&\times (|c|^2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d} + 2i \operatorname{Im} d)\alpha^2 - \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d}) + d \\
&= \frac{1}{4|c|^2}(|c|^4 \pm 2|c|^2\sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d} + \alpha^2 - 4|c|^2 d + 4 \operatorname{Im}^2 d) \\
&- \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d}) + d = \frac{|c|^2}{4} \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d}}{2} \\
&+ \frac{\alpha^2 + 4 \operatorname{Im}^2 d}{4|c|^2} - d - \frac{|c|^2}{2} - i \operatorname{Im} d - \frac{\pm\sqrt{\alpha^2 - 4|c|^2 d}}{2} + d = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, для $(r, s) \in \Omega$ периоды (3) по γ_1 и γ_2 равны нулю.

Корректность конструкции.

Лемма 8. *Множество нулей $c(r, s)$ и $v(r, s)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Из второго утверждения леммы 7 следует, что полином $(a_1r + b_1s)^2$ ненулевой. По шестому утверждению леммы 7 функция $c(r, s)$ не равна тождественно нулю. Отсюда множество нулей $c(r, s)$ имеет меру нуль.

Корни полинома $cv^4 + (|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d)v^2 + \bar{c}d$ равны нулю, если и только если $|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d = 0$ и $\bar{c}d = 0$. Следовательно, необходимым условием $v(r, s) = 0$ является $c(r, s) = 0$. Лемма доказана.

Таким образом, выражения, определяющие ψ_1 и ψ_2, не содержат деления на нуль для почти всех $(r, s) \in \Omega$.

Предложение 5. *Существуют $(r,s) \in \Omega$ такие, что ψ_1 и ψ_2 имеют полюсы в каждой точке $P_0,\dots,P_3,P_4^{\pm},\dots,P_m^{\pm}$.*

Подматрицы, составленные из столбцов $j_1,\dots,j_m$ матрицы M, обозначим через $M_{j_1,\dots,j_m}$.

Лемма 9. *Для почти всех точек $p_1,\dots,p_m \in \mathbb{R}$ таких, что $p_1+p_2+p_3=0$, все квадратные подматрицы $M_{j_1,\dots,j_m}$ невырожденны.*

Доказательство. При переобозначении переменных p_i и p_j для $3 \le i,j \le m$ $(1 \le i,j \le 3)$ меняются местами i-й и j-й столбцы; также меняются местами $(i-3)$-я и $(j-3)$-я строки (только i-й и j-й столбцы) матрицы M. Поэтому достаточно доказать невырожденность подматриц $M_{4,\dots,m}$, $M_{1,4,\dots,m-2}$, $M_{1,2,4,\dots,m-1}$, $M_{1,\dots,m-3}$.

Невырожденность подматрицы $M_{4,\dots,m}$ доказана в лемме 2.

Пусть N — достаточно большое натуральное число. Положим

$$p=(p_1,\dots,p_m)=(-1,0,1,N,N+1,2N,2N+1,\dots).$$

Подматрицы $M_{1,4,\dots,m-1}$, $M_{1,2,4,\dots,m-2}$, $M_{1,\dots,m-3}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix},$$

где S это $M_{4,\dots,m-1}$, $M_{4,\dots,m-2}$ или $M_{4,\dots,m-3}$. По лемме 2 в каждом случае подматрица S невырожденна. Элементы R имеют асимптотическое поведение $\varepsilon = O(1/N)$ при $N \to \infty$. Элементы U ограничены константой, не зависящей от N.

Подматрица T имеет один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{p_m-p_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{p_{m-1}-p_1} & \frac{1}{p_{m-1}-p_2} \\ \frac{1}{p_m-p_1} & \frac{1}{p_m-p_2} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \frac{1}{p_{m-2}-p_1} & \frac{1}{p_{m-2}-p_2} & \frac{1}{p_{m-2}-p_3} \\ \frac{1}{p_{m-1}-p_1} & \frac{1}{p_{m-1}-p_2} & \frac{1}{p_{m-1}-p_3} \\ \frac{1}{p_m-p_1} & \frac{1}{p_m-p_2} & \frac{1}{p_m-p_3} \end{pmatrix}.$$

Выберем числа (только те, которые входят в матрицу T) p_{m-2}, p_{m-1}, $p_m \in (0,1)$ таким образом, чтобы определитель T не был равен нулю. Тогда при $N \to \infty$ матрица

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \varepsilon & S \\ T & * \end{pmatrix}$$

распадается на две матрицы с невырожденными определителями.

Оценим подматрицы $M_{1,4,\dots,m-1}$, $M_{1,2,4,\dots,m-2}$, $M_{1,\dots,m-3}$:

$$\det \begin{pmatrix} \varepsilon & S \\ T & * \end{pmatrix} = \det S \det T + O(1/N).$$

Лемма доказана.

Докажем следствие из леммы 9.

Лемма 10. *Для почти всех $p=(p_1,\dots,p_m)$ таких, что $p_1+p_2+p_3=0$, для каждой точки $P_0,\dots,P_3,P_4^{\pm},\dots,P_m^{\pm}$ найдется функция $\psi \in V(p)$, имеющая полюс в этой точке.*

Доказательство. По лемме 2 пространство

$$V(p)=\left\{\sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z-p_i} \mid (\nu_1,\dots,\nu_k,\dots,\nu_m) \in \ker M\right\}$$

трехмерно для почти всех $p = (p_1, \dots, p_m)$ таких, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

Предположим обратное утверждению леммы: пусть функции из $V(p)$ не имеют полюса в одной из точек $(p_k, w_k) \in \{P_1, P_2, P_3, P_4^{\pm}, \dots, P_m^{\pm}\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$. Тогда

$$V(p) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i} \mid (\nu_1, \dots, \nu_{k-1}, \nu_k, \nu_{k+1}, \dots, \nu_m) \in \ker M,\ \nu_k = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{i=1, i \neq k}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i} \mid (\nu_1, \dots, \nu_{k-1}, \nu_{k+1}, \dots, \nu_m) \in \ker M' \right\},$$

где M' — матрица M с вычеркнутым k-м столбцом.

Для почти всех точек $p_1, \dots, p_m$ матрица M' по лемме 9 имеет максимальный ранг. Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} \ker M' = m - 1 - \operatorname{rank} M' = 2$, а $\dim_{\mathbb{C}} V(p) = \dim_{\mathbb{C}} \ker M = \dim_{\mathbb{C}} \ker M' = 3$. Пришли к противоречию.

Теперь осталось показать справедливость утверждения для точки P_0.

Предположим обратное утверждению леммы. Пусть функции из $V(p)$ не имеют полюса в P_0:

$$V(p) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i} \mid (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \ker M,\ \nu_1 + \dots + \nu_m = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i} \mid (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \ker M'' \right\},$$

где M'' — матрица M, дополненная строкой, состоящей из единиц.

Аналогично доказательству леммы 9 легко доказать, что матрица M'' имеет максимальный ранг для почти всех точек $p_1, \dots, p_m$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} \ker M'' = m - \operatorname{rank} M'' = 2$, а $\dim_{\mathbb{C}} V(p) = \dim_{\mathbb{C}} \ker M = \dim_{\mathbb{C}} \ker M'' = 3$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 11. *Функция $v(r, s)$ не является постоянной на Ω.*

Доказательство. По лемме 8 для почти всех $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ полином $c(r, s)$ не равен нулю. Для $c(r, s) \neq 0$ функция v является корнем полинома

$$v^2 + \frac{(|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d)}{c} v + \frac{\bar{c} d}{c} = 0. \tag{22}$$

Допустим обратное утверждению леммы: пусть нули полинома (22) постоянны. Это означает, что $(|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d)/c$ и $\bar{c}d/c$ постоянны. Отсюда и из вида функций $c(r, s)$ и $d(r, s)$ вытекает, что $d(r, s)$ равна нулю, а $c(r, s)$ постоянна.

Следовательно, $a_1 b_3 - a_3 b_1$ и $a_2 b_3 - a_3 b_2$ одновременно равны нулю; противоречие с четвертым утверждением леммы 7. Лемма доказана.

Лемма 12. *Множество нулей $u(r, s)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. При $s = 0$ и $r \to \infty$ имеем

$$v^2(r, s) = -\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3 + a_3 b_1} a_1^2 r^2 + o(r^2), \quad u^2(r, s) = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 b_3 + a_3 b_1} a_1^2 r^2 + o(r^2). \tag{23}$$

Если $a_1 \neq 0$ и $a_1 b_2 + a_2 b_1 \neq 0$, то из (23) следует, что для почти всех $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ верно $u(s, t) \neq 0$. Если $a_1 = 0$, то утверждение леммы очевидно.

Если $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$, то легко показать справедливость равенств

$$v^2(0,0) = -\frac{a_2b_3 + a_3b_2}{a_1b_3 + a_3b_1}, \quad u^2(0,0) = -\frac{a_1}{a_3}\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1b_3 + a_3b_1}.$$

По шестому утверждению леммы 7 из $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$ имеем $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Таким образом, функция $u(r,s)$ является ненулевой алгебраической. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Доказательство предложения 5. Допустим, что ψ_1 не имеет полюса в точке Q для всех $(r,s) \in \Omega$. Тогда ξ_1 и ξ_2 не имеют полюса в Q. Это следует из вида ψ_1 и из того, что $v(r,s)$ варьируется на Ω по лемме 11.

Поэтому по лемме 10 ξ_3 имеет полюс в Q. Тем самым у

$$\psi_2 = x(r,s)\xi_1 + y(r,s)\xi_2 + u(r,s)\xi_3$$

есть полюс в Q при r и s таких, что $u(r,s) \neq 0$, т. е. ψ_2 имеет полюс для почти всех $(r,s) \in \mathbb{R}^2$.

Таким образом, в каждой точке $P_0, \dots, P_3, P_4^{\pm}, \dots, P_m^{\pm}$ хотя бы одна из функций ψ_1 и ψ_2 имеет простой полюс. Следовательно, у поверхности (2) есть ровно $n = 2m - 2 \geq 6$ вложенных плоских концов. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамаев Э. И.* Минимальные торы с шестью плоскими концами // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2004. Т. 4, № 4. С. 68–73.
2. *Bryant R. L.* A duality theorem for Willmore surfaces // J. Differential Geom. 1984. V. 20, N 1. P. 23–53.
3. *Bryant R. L.* Surfaces in conformal geometry // Proc. Sympos. Pure Math. 1988. V. 48. P. 227–240.
4. *Peng C.-K., Xiao, L.* Willmore surfaces and minimal surfaces with flat ends / Chen. W. H. (ed.) et al. // Geometry and topology of submanifolds X. Proc. conf. on differential geometry in honor of S. S. Chen. Singapore: World Sci., 2000. P. 259–265.
5. *Babich M. V.* Willmore surfaces, 4-particle Toda lattice and double coverings of hyperelliptic surfaces // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. V. 174. P. 143–168.
6. *Kusner R., Schmitt N.* The spinor representation of minimal surfaces in space. University of Massachusetts in Amherst, 1993. (Preprint / GANG; III.27).
7. *Costa C.* Complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ of genus one and four planar embedded ends // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 119, N 4. P. 1279–1287.
8. *Тайманов И. А.* Лекции по дифференциальной геометрии. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
9. *Дубровин Б. А.* Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ижевск: НИЦ «РиХД», 2001.

Статья поступила 21 апреля 2005 г.

Шамаев Эллэй Иванович
НИИ математики при Якутском гос. университете,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
eshamaev@mail.ru