Сходимость одной итерационной последовательности, возникающей в дискретных аналогах потоков обратной средней кривизны

Шамаев Э.И.*

16 февраля 2010 г.

УДК 514.742.45

Введение

Данная статья является продолжением статьи [1]. В статье [1] рассматривались дискретные аналоги потока обратной кривизны для строго выпуклых n-угольников, $n \geqslant 3$, и было показано, что изменение радиусов кривизны $(R_1, R_2, \ldots, R_n) \mapsto (R'_1, R'_2, \ldots, R'_n)$ n-угольника в вершинах при достаточно малых параметрах потока обладает следующим свойством: максимальный радиус кривизны убывает, а минимальный возрастает.

Пусть отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$ задает изменение радиусов кривизн — отображает вектор $(R_1, R_2, \ldots, R_n)$ на вектор

$$(f(R_n, R_1, R_2), f(R_1, R_2, R_3), \ldots, f(R_{n-1}, R_n, R_1)),$$

где непрерывная функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, как показано в [1], обладает следующим свойствами:

1) для любых x, y, z верно

$$\min\{x, y, z\} \leqslant f(x, y, z) \leqslant \max\{x, y, z\};$$

2) существует $a > 0$ такое, что

*поддержано РФФИ, грант 09-01-00598-а.

2.1) если $x \leqslant y \geqslant z$, то для некоторого $\delta(x,y,z) > a$

$$f(x,y,z) \leqslant \delta x + (1-2\delta)y + \delta z;$$

2.2) если $x \geqslant y \leqslant z$, то для некоторого $\delta(x,y,z) > a$

$$f(x,y,z) \geqslant \delta x + (1-2\delta)y + \delta z.$$

Формально свойства 2.1 и 2.2 не были доказаны в статье [1], но следуют из доказательства основной теоремы.

Мы утверждаем

Гипотеза 1 *Тогда для любого* $v \in \mathbb{R}^n$ *последовательность*

$$v, \mathcal{A}(v), \mathcal{A}(\mathcal{A}(v)), \ldots$$

сходится и имеет предел, коллинеарный вектору $u = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$.

Из справедливости этой гипотезы, видимо, можно вывести сходимость дискретного аналога потока обратной кривизны в условиях теоремы 1 из [1]. Мы докажем упрощение утверждения этой гипотезы.

Теорема 1 *Пусть* $a \in (0; \frac{1}{2})$ *фиксированный параметр и пусть линейный оператор* $A(a)$ *отображает вектор* $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *на*

$$(av_n + (1-2a)v_1 + av_2, \ldots, av_{n-1} + (1-2a)v_n + av_1) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда для любого $v \in \mathbb{R}^n$ *и произвольной последовательности чисел* $a_1, a_2, \ldots \in [a; \frac{1}{3}) \subset (0; \frac{1}{3})$ *последовательность*

$$v, A(a_1)v, A(a_2)A(a_1)v, \ldots \tag{1}$$

сходится и имеет предел v_0, *коллинеарный* $u = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$.

Поскольку векторы коллинеарные вектору $u = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$ являются неподвижными точками отображения $A(a)$, $a \in (0; \frac{1}{2})$, то эти отображения не являются сжимающими в пространстве $\mathbb{R}^n$ с любой нормой. Заметим, что эти отображения являются линейными преобразованиями чисел, стоящих по кругу, сопоставляющие каждому элементу его весовое арифметическое среднее с двумя соседними числами.

Доказательство

Будем считать $\mathbb{R}^n$ евклидовым пространством со стандартным скалярным произведением. Индексы i вершин n-угольников будем считать остатками по модулю n, т.е. $i \in \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Выпишем неравенство Йенсена $\alpha_1 g(v_1) + \alpha_2 g(v_2) + \alpha_3 g(v_3) \geqslant g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)$ для функции $g(x) = x^2$, точек v_{i-1}, v_i, v_{i+1} и неотрицательных коэффициентов $(a, 1-2a, a)$:

$$av_{i-1}^2 + (1-2a)v_i^2 + av_{i+1}^2 \geqslant (av_{i-1} + (1-2a)v_i + av_{i+1})^2.$$

Заметим, что равенство справедливо только при $v_{i-1} = v_i = v_{i+1}$ в силу строгой выпуклости вниз $g''(x) > 0$.

Суммируя эти неравенства $i = \overline{1,n}$, получим неравенство

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} (av_{i-1} + (1-2a)v_i + av_{i+1})^2, \tag{2}$$

где равенство имеет место только в случае $v_1 = v_2 = \ldots = v_n$.

Таким образом, мы получили неравенство $||v|| \geqslant ||A(a)v||$, где равенство возможно только при v коллинеарном вектору u.

Выведем из неравенства Коши-Буняковского для пары векторов $(v_1, \ldots, v_n)$, $(v_2, v_3 \ldots, v_n, v_1)$ и пары $(v_1, \ldots, v_n)$, $(v_3, v_4 \ldots, v_1, v_2)$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} v_i v_{i+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} v_i v_{i+2}, \tag{3}$$

оценку $||A(a)v|| \geqslant ||A(b)v||$, для всех $b \in [a, \frac{1}{3})$.

Используя равенства

$$\sum_{i=1}^{n} v_i v_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} v_{i+1} v_{i+2}, \quad \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_{i+1}^2, \quad \sum_{i=1}^{n} v_i v_{i+2} = \sum_{i=1}^{n} v_{i-1} v_{i+1},$$

легко представить $||A(a)v||$ в виде сумм линейной комбинации сумм по всем вершинам $\sum v_i^2$, $\sum v_i v_{i+1}$ и $\sum v_i v_{i+2}$. А именно

$$||A(a)v|| = (a^2 + (1-2a)^2 + a^2) \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 4a(1-2a) \sum_{i=1}^{n} v_i v_{i+1} + 2a^2 \sum_{i=1}^{n} v_i v_{i+2}.$$

Тогда в разложении $||A(a)v|| - ||A(b)v||$ коэффициент перед суммой квадратов равен

$$2a^2 + (1-2a)^2 - 2b^2 - (1-2b)^2 = 2(b-a)(2-3a-3b);$$

коэффициент перед суммой $\sum v_i v_{i+1}$ равен

$$4a(1-2a) - 4b(1-2b) = -2(b-a)(2-4a-4b);$$

коэффициент перед суммой $\sum v_i v_{i+2}$ равен

$$2a^2 - 2b^2 = -2(b-a)(a+b).$$

Поскольку $b - a > 0$, $2 - 3a - 3b > 0$, то неравенство $||A(a)v|| - ||A(b)v|| \geqslant 0$ следует из неравенств (3).

Рассмотрим подпространство $W \subset \mathbb{R}^n$, составленное из векторов, перпендикулярных вектору $u = (1, 1, \dots, 1)$. Прямые вычисления показывают, что линейное отображение $A(b)$, $b \in [a; \frac{1}{3})$ отображает векторы $w \in W$ в W, т.е. сужение $A_W(b) = A(b)|_W$ корректно определено в пространстве W. Покажем, что $A_W(b) : W \to W$ является сжимающим отображением с коэффициентом $q_b \geqslant q_a$. Пусть S — сфера единичного радиуса в W. Из неравенства (2) следует

$$\frac{||A(a)_W v||}{||v||} < 1, \quad v \in S.$$

В силу компактности S функция $\frac{||A_W(a)v||}{||v||}$ достигает наибольшее значение, которое обозначим через q. Ясно, что $q < 1$.

Следовательно,

$$||A_W(b)v|| \leqslant ||A_W(a)v|| \leqslant q||v||$$

для каждого $b \in [a; \frac{1}{3})$. Теперь, применяя теорему о сжимающем отображении получаем, что последовательность

$$v, A_W(a_1)v, A_W(a_2)A_W(a_1)v, \dots$$

в условиях теоремы всегда сходится к нулевому вектору в пространстве W. В силу того, что все коллинеарные u векторы инвариантны относительно A и линейности A получаем, что последовательность (1) сходится к вектору $v_0 = \frac{(v,u)}{(u,u)} u$. Теорема доказана.

Литература

[1] Винокуров А. В., Шамаев Э. И. Дискретные аналоги потоков обратной средней кривизны для строго выпуклых многоугольников // Мат. заметки ЯГУ. 2009. Т. 16, вып. 1. С. 16–21.

УДК 514.742.45

автор:
Шамаев Эллэй Иванович
Shamaev Elley Ivanovich
eshamaev@mail.ru
8-924-660-29-77
стар. научный сотрудник ФГНУ НИИ математики при ЯГУ
к.ф.-м.н.

Статья поддержана грантом РФФИ 09-01-00598-а
УДК 514.742.45
Ключевые слова: дискретный аналог потока обратной средней кривизны, дискретная дифференциальная геометрия, разностные схемы, итерационный алгоритм

Аннотация: В данной статье показано существование и единственность предела одной итерационной последовательности, возникающей при исследовании сходимости дискретных аналогов потоков средней кривизны для строго выпуклых многоугольников.

keywords: discrete inverse curvature flow, discrete differential geometry, finite difference method, iterative algorithm

Аннотация: It is proven that a iteration sequence appeared from discrete analogs of inverse mean curvature flows for strictly convex polygon is convergent.

Vinokurov A. V., Shamaev E. I. Discrete analogs of inverse mean curvature flows for strictly convex polygon. // Math. notes of YSU. 2009. Vol. 16. No. 1. pp. 16–21.