УДК 514.742.45

ДИСКРЕТНЫЕ АНАЛОГИ ПОТОКОВ ОБРАТНОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ ДЛЯ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

А. В. Винокуров, Э. И. Шамаев

В статье предложен дискретный аналог потока обратной средней кривизны для замкнутых ломаных — многоугольников; также в работе показаны некоторые свойства этого потока.

Напомним, что *потоком обратной средней кривизны* или *потоком радиуса кривизны* называется семейство регулярных замкнутых кривых $f : S^1 \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{\partial f(p,t)}{\partial t} = \frac{1}{H_s} N_s, \quad p \in S^1,\ t \in [0,T],$$

где N_s — нормаль, H_s — кривизна кривой в точке $p \in S^1$. Такой поток был применен Хуискеном и Илманеном в пространстве большей размерности для доказательства неравенства Пенроуза в теории гравитации [1]. Впервые для этих целей был предложен Герохом [2].

Определим дискретные кривизну и нормаль.

Определение 1. Пусть Ω — произвольная ломаная с тремя последовательными вершинами A, B и C. Обозначим через r радиус окружности, описанной около треугольника ABC, пусть O — центр этой окружности. *Кривизной* H, *радиусом кривизны* R и *нормалью* N в вершине B ломаной Ω назовем

$$H = \pm\frac{1}{r}, \quad R = \pm r, \quad N = \pm\frac{1}{|OB|}\overrightarrow{OB},$$

где знаки выражений выбираются в зависимости от обхода ломаной.

Далее вместо «окружность, описанная около треугольника ABC» будем говорить «окружность ABC».

Дадим определение дискретному потоку обратной средней кривизны для многоугольников.

Определение 2. Пусть ε — неотрицательное действительное число. Отображение F_ε, сопоставляющее многоугольнику $A_0A_1\ldots A_{n-1}$, $n \geqslant 3$, многоугольник $B_0B_1\ldots B_{n-1}$ по следующему правилу:

$$\overrightarrow{A_kB_k} = \varepsilon\frac{1}{H}N, \quad k = \overline{0, n-1},$$

где H — кривизна ломаной в точке A_k, называется *потоком обратной средней кривизны* для многоугольников.

Другими словами, для $0 \leqslant k < n$ вершине A_k соответствует точка B_k такая, что $\overrightarrow{OB_k} = (1+\varepsilon)\overrightarrow{OA_k}$, где O — центр окружности $A_{k-1}A_kA_{k+1}$.

В данной статье доказана следующая

Теорема 1. *Рассмотрим строго выпуклый многоугольник Ω с наименьшим радиусом кривизны $R_{\min}(\Omega) > 0$, конечным наибольшим радиусом кривизны $R_{\max}(\Omega)$ и наименьшей стороной $l_{\min}(\Omega) > 0$.*

Тогда существует ε_0 такой, что $F_\varepsilon(\Omega)$ существует и справедливы неравенства

$$l_{\min}(F_\varepsilon(\Omega)) \geqslant (1+\varepsilon)l_{\min}(\Omega), \tag{1}$$

$$R_{\min}(F_\varepsilon(\Omega)) \geqslant (1+\varepsilon)R_{\min}(\Omega), \tag{2}$$

$$R_{\max}(F_\varepsilon(\Omega)) \leqslant (1+\varepsilon)R_{\max}(\Omega) \tag{3}$$

для всех $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$.

Данная теорема доказана с целью приблизиться к доказательству следующего утверждения.

Гипотеза. *Для многоугольника Ω, удовлетворяющего условиям теоремы 1, существует ε такой, что предел*

$$\lim_{m\to\infty} H^m(O, \underbrace{F_\varepsilon(F_\varepsilon(\ldots F_\varepsilon}_{m \text{ раз}}(\Omega)\ldots))),$$

где $H^m(O,\cdot)$ — гомотетия с коэффициентом $\frac{1}{(1+\varepsilon)^m}$ и центром в произвольной точке O, существует и является выпуклым и вписанным в окружность многоугольником.

Доказательство теоремы 1. Пусть $I=\{1,2,\dots,n\}$. Обозначим вершины n-угольника Ω через A_i, $i\in I$, радиус кривизны в вершине A_i, $i\in I$, — через R_i, длину отрезка A_iA_{i+1}, $i\in I$, — через l_i или $l_i(\Omega)$. Здесь и далее индекс $i+1$ означает индекс вершины, следующей за вершиной A_i.

Вершины $F_\varepsilon(\Omega)$ обозначим через B_i, $i\in I$; $R_i(F_\varepsilon(\Omega))$ — радиус кривизны в вершине $B_i\in F_\varepsilon(\Omega)$, $i\in I$; $l_i(F_\varepsilon(\Omega))$ — длина отрезка B_iB_{i+1}, $i\in I$.

Лемма 1. *Пусть ABC — три произвольные последовательные вершины выпуклого многоугольника Ω, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Точка пересечения перпендикуляров к прямым AB и BC в точках A_ε и C_ε таких, что выполнено равенство векторов $\frac{\varepsilon}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}_\varepsilon$ и $\frac{\varepsilon}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}_\varepsilon$, является образом $B\in\Omega$ при отображении F_ε.*

Доказательство. Пусть M_A и M_C — середины сторон AB и BC соответственно. Тогда центр O окружности ABC является пересечением перпендикуляров к AB и BC, проходящих через M_A и M_C. Образ точки B при потоке F_ε обозначим через $F_\varepsilon(B)$. Эта точка определяется с помощью следующего векторного уравнения $\overrightarrow{BF}_\varepsilon(B)=\varepsilon\overrightarrow{OB}$. Тогда поворотная гомотетия с центром в точке B, углом поворота π и коэффициентом гомотетии ε отображает точки O, M_A и M_C в точки $F_\varepsilon(B)$, A_ε и C_ε соответственно. Теперь ясно, что $F_\varepsilon(B)A_\varepsilon$ и $F_\varepsilon(B)C_\varepsilon$ перпендикулярны AB и BC соответственно. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для выпуклого многоугольника Ω и любого $\varepsilon>0$ справедливо равенство*

$$l_i\left(F_\varepsilon(\Omega)\right)=\sqrt{(1+\varepsilon)^2+s_1(R_i,R_{i+1},l_i(\Omega))\varepsilon^2}\,l_i(\Omega),\quad i\in I,$$

где функция $s_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *определена следующим образом:*

$$s_1(R, r, l) = \left(\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}} - \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}} \right)^2 .$$

Доказательство. Пусть $i \in I$ произвольное. Обозначим через C_i и C_{i+1} образы A_i и A_{i+1} при гомотетии с центром в середине $A_i A_{i+1}$ с коэффициентом $1+\varepsilon$. По лемме 1 треугольники $B_i C_i A_i$ и $B_{i+1} C_{i+1} A_{i+1}$ являются прямоугольными. При этом гипотенузы $A_i B_i = \varepsilon R_i$ и $A_{i+1} B_{i+1} = \varepsilon R_i$ и катеты $A_i C_i = A_{i+1} C_{i+1} = \frac{1}{2} \varepsilon l_i$. Следовательно, длины катетов равны

$$B_i C_i = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{4R_i^2 - l_i^2}, \quad B_{i+1} C_{i+1} = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{4R_{i+1}^2 - l_i^2}, \quad i \in I.$$

Теперь осталось найти гипотенузу $B_i B_{i+1}$:

$$B_i B_{i+1} = \sqrt{(1+\varepsilon)^2 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{4R_i^2 - l_i^2} - \sqrt{4R_{i+1}^2 - l_i^2} \right)^2 \varepsilon^2}, \quad i \in I.$$

Лемма доказана.

Поскольку функция s_1 не принимает отрицательных значений, из леммы 2 следует справедливость неравенства (1) теоремы.

Докажем оставшиеся два неравенства теоремы. Рассмотрим радиусы кривизны $R_1(F_\varepsilon(\Omega))$, $R_2(F_\varepsilon(\Omega))$, $\ldots$, $R_n(F_\varepsilon(\Omega))$ как семейство функций от ε. Ясно, что каждая из этих функций и, следовательно,

$$R_{\min}(F_\varepsilon(\Omega)) = \max\{R_1(F_\varepsilon(\Omega)), \ldots, R_n(F_\varepsilon(\Omega))\},$$

$$R_{\max}(F_\varepsilon(\Omega)) = \min\{R_1(F_\varepsilon(\Omega)), \ldots, R_n(F_\varepsilon(\Omega))\}$$

непрерывно зависят от ε. В силу непрерывности функций $R_1(F_\varepsilon(\Omega))$, $R_2(F_\varepsilon(\Omega))$, $\ldots$, $R_n(F_\varepsilon(\Omega))$ от ε существует отрезок $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, на котором

$$R_{\min}(F_\varepsilon(\Omega)) = R_i(F_\varepsilon(\Omega)) \quad \text{и} \quad R_{\max}(F_\varepsilon(\Omega)) = R_j(F_\varepsilon(\Omega))$$

для некоторых $i, j \in I$. Очевидно, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что многоугольник $F_{\varepsilon_0}(\Omega)$ является строго выпуклым. Докажем неравенства (2) и (3) на отрезке $[0, \varepsilon_0]$.

Рассмотрим пять последовательных вершин $ABCDE$ многоугольника Ω, где точка C имеет наименьший радиус кривизны $R_{\min}(\Omega)$. Обозначим окружность, описанную около BCD, через S. Образ окружности S при гомотетии с коэффициентом $1+\varepsilon$ и центром в центре окружности S обозначим через S'.

Пусть образы вершин A, B, C, D и E при отображении F_ε — точки A', B', C', D' и E' соответственно. Из определения потока обратной средней кривизны следует, что C' лежит на S'.

Покажем, что B' лежит на S' или вне нее. Центр окружности, описанной около ABC, лежит на серединном перпендикуляре BC. Образом серединного перпендикуляра BC при поворотной гомотетии с центром в B, коэффициентом ε и углом поворота π является перпендикулярная к BC прямая τ, проходящая через ближайшую к B точку S'. По лемме 1 точка B' лежит на прямой τ. Расположение точки B' на τ зависит от радиуса окружности ABC монотонно. Поскольку окружность BCD имеет минимальный радиус, то B' лежит на τ на S' или вне нее.

Рассмотрим симметричную задачу, где также легко показать, что точка D' лежит вне или на окружности S'. Теперь, поскольку C' лежит на S' и точки B' и D' лежат вне S', кроме того, O', B' и D' лежат от касательной окружности S' в точке C' в одной полуплоскости в силу ограничения $\varepsilon < \varepsilon_0$, радиус окружности, описанной около $B'C'D'$, больше $(1+\varepsilon)R_{\min}(\Omega)$. Неравенство (2) доказано.

Рассмотрим пять последовательных вершин $ABCDE$ многоугольника Ω, где точка C имеет наибольший радиус кривизны $R_{\max}(\Omega)$. Пусть S'' — образ окружности BCD при гомотетии с коэффициентом $1+\varepsilon$ с центром в центре окружности BCD.

Пусть образы вершин A, B, $\ldots$, E при отображении F_ε — точки $A', B', \ldots , E'$ соответственно. Ясно, что C' лежит на окружности BCD. Покажем, что B' лежит на S'' или вне нее.

Центр окружности, описанной около ABC, лежит на серединном перпендикуляре BC. Образом серединного перпендикуляра BC при поворотной гомотетии с центром в B, коэффициентом ε и углом поворота π является перпендикулярная к BC прямая τ, проходящая через ближайшую к B точке S''.

Таким образом, точка B' лежит на прямой τ внутри S''. Расположение точки B' на τ зависит от радиуса окружности ABC монотонно. Поскольку окружность ABC имеет максимальный радиус, то B' лежит на τ на S'' или внутри нее.

Рассматривая симметричную задачу, можно показать, что точки D' и C' лежат на окружности S'' или внутри нее. Теперь, поскольку C' лежит на S'' и точки C' и D' лежат внутри S'', радиус окружности, описанной около $B'C'D'$, меньше $(1+\varepsilon)R_{\max}(\Omega)$. Таким образом, для $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$ величина $(1+\varepsilon)R_{\max}(\Omega)$ больше $R_{\max}(F_\varepsilon(\Omega))$, что и означает справедливость неравенства (3). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huisken G., Ilmanen T.* The Riemannian–Penrose inequality // Intern. Math. Res. Not. 1997. V. 20. P. 1045–1058.

2. *Geroch R.* Energy extraction // Ann. New York Acad. Sci. 1973. V. 224. P. 108–117.

г. Якутск *19 февраля 2009 г.*