*УДК 514.752.437*

# СУЩЕСТВОВАНИЕ ПОЛНОГО МИНИМАЛЬНОГО ТОРА С ПЯТЬЮ ПЛОСКИМИ КОНЦАМИ С ОДНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ*)

Э. И. Шамаев

## Введение

Мы продолжаем исследовать вопрос о существовании полных минимальных поверхностей, ведущих себя на бесконечности асимптотически как плоскость и гомеоморфных тору с выколотыми точками [1, 2]. В этой статье нами построен пример такой поверхности с особой точкой.

**Теорема 1.** *Существует минимальное погружение римановой поверхности рода один* $\Gamma$, *заданной в* $\mathbb{C}^2$ *уравнением*

$$w^2 = 4z^3 - 4z, \tag{1}$$

*в* $\mathbb{R}^3$ *с пятью плоскими концами и одной особой точкой.*

Брайант [3] показал, что полные минимальные поверхности с плоскими концами под действием инверсии $\mathbb{R}^3$ переходят в уиллморовские. Этим фактом вызван интерес к полным минимальным поверхностям с плоскими концами без особых точек. Для любого четного $n > 2$ примеры таких поверхностей построены [1, 2, 4, 5]. Для нечетного случая неизвестно существование полного минимального тора даже с $n = 5$ плоскими концами. Торы с $n = 1, 3$ не существуют [5, 6].

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00094).

**Гипотеза.** *Не существуют полные минимальные торы в* $\mathbb{R}^3$ *с пятью плоскими концами.*

Наш пример построен с помощью представления Вейерштрасса [7]:

$$\Phi(T) = \mathrm{Re} \int_{T_0}^{T} \left(\psi_1^2 - \psi_2^2, i\left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right), 2\psi_1\psi_2\right) \frac{dz}{w}, \tag{2}$$

где $T_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка, $\psi_1^2$, $\psi_2^2$ и $\psi_1\psi_2$ — мероморфные функции на $\Gamma$ такие, что $\left|\psi_1^2(T)\right| + \left|\psi_2^2(T)\right| \neq 0$ для точек $T \in \Gamma$.

Считаем точки ветвления $\infty$, $(0,0)$, $(0,1)$ и две произвольные симметрические точки $(\pm w_0, z_0) \in \Gamma$ выколотыми. Положим

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{z - z_0}{z(z-1)} w;$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0 - 1} + \frac{1}{z_0 + 1}\right)\frac{z_0}{z} - \frac{4}{z - z_0}\right) w$$

и

$$\psi_1 = \varphi_1, \quad \psi_2 = \alpha(\varphi_1 + \beta\varphi_2), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

По теореме Вейерштрасса — Эннепера отображение (2) задает минимальное погружение односвязных областей $\Gamma$ в $\mathbb{R}^3$.

Для того чтобы отображение $\Phi$ задавало минимальную поверхность с плоскими концами, необходимо, чтобы каждый полюс дифференциалов

$$\psi_1^2 \frac{dz}{w}, \quad \psi_2^2 \frac{dz}{w}, \quad \psi_1\psi_2 \frac{dz}{w} \tag{3}$$

был второго порядка с нулевыми вычетами [7]. Справедлива

**Лемма 1.** *Для каждого* $z_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0, \pm 1\}$ *и* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *дифференциалы* (3) *имеют полюсы только второго порядка с нулевыми вычетами.*

Теперь, чтобы $\Phi$ был корректно определен на всем $\Gamma$, достаточно, чтобы следующие интегралы (*периоды*) были нулевыми:

$$\mathrm{Re} \int_{\gamma_i} \left(\psi_1^2 - \psi_2^2\right) \frac{dz}{w} = 0, \quad \mathrm{Im} \int_{\gamma_i} \left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right) \frac{dz}{w} = 0, \quad \mathrm{Re} \int_{\gamma_i} 2\psi_1\psi_2 \frac{dz}{w} = 0, \tag{4}$$

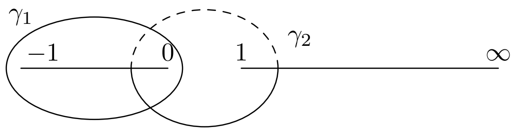


Рис. 1.

где $i = 1, 2$; $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — базис $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$.

Выбирая параметры $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $(w_0, z_0) \in \Gamma$, обнулим периоды (4).

Представим $\Gamma$ как две плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ («нижний» и «верхний» листы) с разрезами по отрезкам $[-1, 0]$ и $[1, \infty)$. На $\Gamma$ определены голоморфная и антиголоморфная инволюции: $\sigma : (w, z) \mapsto (-w, z)$, $\tau : (w, z) \mapsto (\overline{w}, \bar{z})$. Выберем циклы $\gamma_1$ и $\gamma_2$, как показано на рис. 1. Многоточием обозначены части циклов, расположенные на «нижнем» листе римановой поверхности. Они образуют канонический базис в $H_1(\Gamma; \mathbb{Z})$ и преобразуются инволюцией $\tau$ по формулам $\tau\gamma_1 = \gamma_1$, $\tau\gamma_2 = -\gamma_2$. Отсюда следует

**Лемма 2.** *Для всех $z_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0, \pm 1\}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ следующие периоды:*

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\gamma_2} \left(\psi_1^2 - \psi_2^2\right) \frac{dz}{w} = \operatorname{Im} \int\limits_{\gamma_1} \left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right) \frac{dz}{w} = \operatorname{Re} \int\limits_{\gamma_2} 2\psi_1\psi_2 \frac{dz}{w}$$

*равны нулю.*

Пусть

$$\eta_k = -\frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{zdz}{w}, \quad \omega_k = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2;$$

$$a_{11} = 2\left(z_0^2 - z_0 + 1\right); \quad a_{12} = \frac{1}{2}\left(3z_0 + \frac{2}{z_0 - 1} - 1\right);$$

$$a_{22} = \frac{2{z_0}^2}{\left(z_0 - 1\right)^2 \left(z_0 + 1\right)^2} + \frac{9}{2}; \quad b_{11} = -{z_0}^2 + 1;$$

$$b_{12} = -\frac{3}{2} z_0 - \frac{1}{z_0 + 1} - \frac{1}{2}; \quad b_{22} = \frac{-4z_0}{\left(z_0 - 1\right)\left(z_0 + 1\right)}.$$

В следующей лемме вычислены периоды.

**Лемма 3.** *Для $k = 1, 2$ справедливы равенства*

$$\int\limits_{\gamma_k} \varphi_1\varphi_2 \frac{dz}{w} = -8a_{12}\eta_k + 8b_{12}\omega_k;$$

$$\int\limits_{\gamma_k} \varphi_1^2 \frac{dz}{w} = -8a_{11}\eta_k + 8b_{11}\omega_k; \quad \int\limits_{\gamma_k} \varphi_2^2 \frac{dz}{w} = -8a_{22}\eta_k + 8b_{22}\omega_k.$$

Теперь условие того, что выполнено (4), перепишем в алгебраическом виде:

$$- \eta_1(a_{11} - \alpha^2(a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\beta + a_{11}) \\ + \omega_1(b_{11} - \alpha^2(b_{22}\beta^2 + 2b_{12}\beta + b_{11}) = 0;$$

$$- \eta_2(a_{11} + \alpha^2(a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\beta + a_{11})) \\ + \omega_2(b_{11} + \alpha^2(b_{22}\beta^2 + 2b_{12}\beta + b_{11})) = 0;$$

$$-\eta_1\alpha(a_{12}\beta + a_{11}) + \omega_1\alpha(b_{12}\beta + b_{11}) = 0.$$

Пусть

$$A_{11} = a_{22}\beta^2 + 2a_{12}\beta + a_{11}, \quad B_{11} = b_{22}\beta^2 + 2b_{12}\beta + b_{11}.$$

В случае

$$\det\begin{pmatrix} -\eta_1 a_{11} + \omega_1 b_{11} & \eta_1 A_{11} - \omega_1 B_{11} \\ -\eta_2 a_{11} + \omega_2 b_{11} & -\eta_2 A_{11} + \omega_2 B_{11} \end{pmatrix} = 0; \quad \frac{\omega_2 b_{11} - \eta_2 a_{11}}{\omega_2 B_{11} - \eta_2 A_{11}} < 0 \quad (5)$$

условие (4) выполнено при

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\omega_2 b_{11} - \eta_2 a_{11}}{\omega_2 B_{11} - \eta_2 A_{11}}}, \quad \beta = -\frac{\omega_1 b_{11} - \eta_1 a_{11}}{\omega_1 b_{12} - \eta_1 a_{12}}.$$

Справедлива

**Лемма 4.** *Существует $z_0 \in \mathbb{R}$ такой, что условие* (5) *выполнено и отображение* (2) *является погружением* $\Gamma$ *с особой точкой* $(0, -1)$.

Из лемм 1–4 следует справедливость теоремы 1.

### Доказательство теоремы 1

Доказательство леммы 1. Пусть $\varphi$ — один из дифференциалов $\psi_1^2\frac{dz}{w}$, $\psi_2^2\frac{dz}{w}$, $\psi_1\psi_2\frac{dz}{w}$. Тогда справедливо равенство $\sigma^*\varphi = -\varphi$. Это означает, что разложение $\varphi$ в ряд Лорана в выколотых точках ветвления относительно локального параметра $w$ имеет вид

$$\varphi = \left(\frac{c_{-2}}{w^2} + \frac{c_{-1}}{w} + c_0 + \dots\right) dw = -\sigma^*\varphi = \left(\frac{c_{-2}}{w^2} - \frac{c_{-1}}{w} + c_0 + \dots\right) dw.$$

Поэтому $c_{-1} = \operatorname{res}\varphi = 0$ в выколотых точках ветвления.

Очевидно, что $\varphi_1^2\frac{dz}{w}$ и $\varphi_1\varphi_2\frac{dz}{w}$ голоморфны в точках $(\pm w_0, z_0)$.

Осталось показать справедливость леммы для $\varphi_2^2\frac{dz}{w}$ в точках $(\pm w_0, z_0)$. Поскольку

$$\frac{2}{w_0}\frac{dw}{dz}\bigg|_{(w_0,z_0)} = \frac{1}{z_0 - 1} + \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0 + 1},$$

то

$$4\varphi_2^2\frac{dz}{w} = \left(\frac{2}{w_0}\frac{dw}{dz}\bigg|_{(w_0,z_0)}\frac{z_0}{z} - \frac{4}{z - z_0}\right)^2 w\,dz.$$

Из равенств

$$\operatorname*{res}_{(w_0,z_0)}\frac{w}{(z - z_0)^2} = \frac{dw}{dz}\bigg|_{(w_0,z_0)}, \qquad \operatorname*{res}_{(w_0,z_0)}\frac{f(w,z)}{z - z_0} = f(w_0, z_0)$$

следует, что

$$\operatorname{res} 4\varphi_2^2\frac{dz}{w} = \operatorname{res}\left(\frac{16w}{(z - z_0)^2} - \frac{16w}{w_0}\frac{z_0}{z}\frac{dw}{dz}\bigg|_{(w_0,z_0)}\frac{1}{z - z_0}\right) dz = 0.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть $\varphi$ — один из дифференциалов

$$(\psi_1^2 - \psi_2^2)\frac{dz}{w}, \quad (\psi_1^2 + \psi_2^2)\frac{dz}{w}, \quad \psi_1\psi_2\frac{dz}{w}.$$

Из $\tau^*\varphi = \bar{\varphi}$, что можно проверить непосредственными выкладками, вытекают равенства

$$\int\limits_{\gamma_1}\varphi = \int\limits_{\tau\gamma_1}\varphi = \int\limits_{\tau\tau\gamma_1}\tau^*\varphi = \overline{\int\limits_{\gamma_1}\varphi},$$

$$\int\limits_{\gamma_2}\varphi = \int\limits_{-\tau\gamma_2}\varphi = \int\limits_{-\tau\tau\gamma_2}\tau^*\varphi = -\overline{\int\limits_{\gamma_2}\varphi}.$$

Это означает, что периоды $\varphi$ по $\gamma_1$ вещественны, а по $\gamma_2$ чисто мнимы.

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Обозначим $\frac{1}{2z_0-2}+\frac{1}{2z_0}+\frac{1}{2z_0+2}$ через $\lambda$. Прямыми вычислениями можно проверить справедливость следующих равенств:

$$\varphi_1^2\frac{dz}{w}=z\frac{dz}{w}+z_0^2\left(-z+\frac{w^2}{4z^2}\right)\frac{dz}{w}$$
$$+(z_0-1)^2\left(-z-1+\frac{1}{4}\left(\frac{w}{z-1}\right)^2\right)\frac{dz}{w}+b_{11}\frac{dz}{w};$$
$$\varphi_2^2\frac{dz}{w}=(\lambda z_0-2)^2z\frac{dz}{w}-2(z+z_0)\frac{dz}{w}+\lambda^2z_0^2\left(-z+\frac{w^2}{4z^2}\right)\frac{dz}{w}$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{w-w_0}{z-z_0}\right)^2\frac{dz}{w}+\frac{1}{4}\left(\frac{w+w_0}{z-z_0}\right)^2\frac{dz}{w}+b_{22}\frac{dz}{w};$$
$$\varphi_1\varphi_2\frac{dz}{w}=(\lambda z_0-2)z\frac{dz}{w}+\lambda z_0^2\left(-z+\frac{w^2}{4z^2}\right)\frac{dz}{w}+b_{12}\frac{dz}{w}.$$

Известно [8], что для

$$\omega_1=\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_1}\frac{dz}{w},\quad \omega_2=\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_2}\frac{dz}{w}$$

отображение $\rho(u)=(\rho'(u),\rho(u))$, построенное с помощью пе-функции Вейерштрасса $\rho$, задает биголоморфное отображение тора $\mathbb{C}/\{2\omega_1n+2\omega_2m\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ на Γ. Считаем, что $u$ — глобально определенный локальный параметр.

По теореме сложения

$$\rho(u+v)=-\rho(u)-\rho(v)+\frac{1}{4}\left(\frac{\rho'(u)-\rho'(v)}{\rho(u)-\rho(v)}\right)$$

для произвольного $v\in\mathbb{C}/\{2\omega_1n+2\omega_2m\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$. Кроме того,

$$\{\rho(\omega_1),\rho(\omega_2),\rho(\omega_1+\omega_2)\}=\{-1,0,1\}\quad\text{и}\quad\rho(0)=\infty.$$

Пусть $u_0$ — точка такая, что $\rho(u_0)=(w_0,z_0)$.

Для $\{k,l\}=\{1,2\}$ справедливы следующие равенства:

$$\rho^*\left(\varphi_1^2\frac{dz}{w}\right)=\rho(u)\,du+z_0^2\rho(u+\omega_k)\,du+(z_0-1)^2\rho(u+\omega_l)du+b_{11}\,du;$$

$$\rho^*\left(\varphi_2^2\frac{dz}{w}\right)=(\lambda z_0-2)^2\rho(u)\,du+\lambda^2z_0^2\rho(u+\omega_k)\,du+\rho(u+u_0)\,du$$
$$+\rho(u-u_0)\,du+b_{22}\,du;$$

$$\rho^*\left(\varphi_1\varphi_2\frac{dz}{w}\right)=(\lambda z_0-2)\rho(u)\,du+\lambda z_0^2\rho(u+\omega_k)du+b_{12}\,du.$$

Теперь утверждение леммы получаем из следующих равенств:

$$\int\limits_{\gamma_j}\rho(u)\,du=\int\limits_{\gamma_j}\rho(u+\omega_k)\,du=\int\limits_{\gamma_j}\rho(u+\omega_l)\,du=\int\limits_{\gamma_j}z\frac{dz}{w}=2\eta_j,\quad j=1,2;$$

$$\int\limits_{\gamma_j}du=\int\limits_{\gamma_j}\frac{dz}{w}=2\omega_j,\quad j=1,2.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Поскольку мы рассматриваем квадратный тор, то $\omega_2=i\omega_1$, $\eta_2=-i\eta_1$. Определитель (5) равен

$$\det\begin{pmatrix}-\eta_1a_{11}+\omega_1b_{11} & \eta_1A_{11}-\omega_1B_{11}\\ i\eta_1a_{11}+i\omega_1b_{11} & i\eta_1A_{11}+i\omega_1B_{11}\end{pmatrix}=-2i\big(a_{11}A_{11}\eta_1^2-b_{11}B_{11}\omega_1^2\big).$$

Подставляя в $a_{11}A_{11}\eta_1^2-b_{11}B_{11}\omega_1^2$ значения $a_{11}$, $b_{11}$, $A_{11}$, $B_{11}$, получим

$$a_{11}A_{11}\eta_1^2-b_{11}B_{11}\omega_1^2=-252\eta_1^3+198\eta_1^2\omega_1+36\eta_1{\omega_1}^2-54{\omega_1}^3$$
$$+\big(468\eta_1^3-204\eta_1^2\omega_1+76\eta_1{\omega_1}^2-68{\omega_1}^3\big)z_0$$
$$+\big(-328\eta_1^3-52\eta_1^2\omega_1-184\eta_1{\omega_1}^2+84{\omega_1}^3\big)z_0^2+\big(-388\eta_1^3+244\eta_1^2\omega_1-28\eta_1{\omega_1}^2$$
$$+252{\omega_1}^3\big)z_0^3+\big(744\eta_1^3+200\eta_1{\omega_1}^2\big)z_0^4$$
$$-\big(388\eta_1^3+244\eta_1^2\omega_1+28\eta_1{\omega_1}^2+252{\omega_1}^3\big)z_0^5$$
$$+\big(-328\eta_1^3+52\eta_1^2\omega_1-184\eta_1{\omega_1}^2-84{\omega_1}^3\big)z_0^6$$
$$+\big(468\eta_1^3+204\eta_1^2\omega_1+76\eta_1{\omega_1}^2+68{\omega_1}^3\big)z_0^7$$
$$+\big(-252\eta_1^3-198\eta_1^2\omega_1+36\eta_1{\omega_1}^2+54{\omega_1}^3\big)\big(4{\eta_1}^2-{\omega_1}^2-2\eta_1(2\eta_1+\omega_1)z_0$$
$$+(2\eta_1+\omega_1)^2{z_0}^2\big)/\big(\eta_1\big(3-z_0-z_0^2+3z_0^3\big)+\omega_1\big(-3-z_0+z_0^2+3z_0^3\big)\big)^2.$$

Для корней

$$4{\eta_1}^2 - {\omega_1}^2 - 2\eta_1(2\eta_1 + \omega_1)z_0 + (2\eta_1 + \omega_1)^2{z_0}^2 = 0$$

условие

$$\frac{\omega_2 b_{11} - \eta_2 a_{11}}{\omega_2 B_{11} - \eta_2 A_{11}} < 0$$

не выполнено.

С помощью оценок $\omega_1$ и $\eta_1$ можно показать, что $z_0 \sim -38.43$ является корнем $a_{11}A_{11}\eta_1^2 - b_{11}B_{11}\omega_1^2 = 0$, при этом условие

$$\frac{\omega_2 b_{11} - \eta_2 a_{11}}{\omega_2 B_{11} - \eta_2 A_{11}} < 0$$

выполнено.

Нулями функции $\psi_1$ являются три точки $(\pm w_0, z_0)$ и $(0, -1)$. Функция $\psi_2$ в точках $(\pm w_0, z_0)$ имеет полюсы. Таким образом, общим нулем $\psi_1$ и $\psi_2$, или особой точкой (2), является единственная точка $(0, -1)$.

Лемма 4 доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Шамаев Э. И.* Минимальные торы с шестью плоскими концами // Вестник НГУ. Математика, механика, информатика. 2004. Т. 4, № 4. С. 68–73.
2. *Шамаев Э. И.* Об одном семействе минимальных торов в $\mathbb{R}^3$ с плоскими концами // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1407–1426.
3. *Bryant R. L.* A duality theorem for Willmore surfaces // J. Differential Geometry. 1984. V. 20. P. 23–53.
4. *Costa C.* Complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ of genus one and four planar embedded ends // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 119. P. 1279–1287.
5. *Kusner R., Schmitt N.* The spinor representation of minimal surfaces in space // Univ. Massachusetts in Amherst, 1993 (GANG preprint III.27).
6. *Шамаев Э. И.* Минимальные торы в $\mathbb{R}^3$ с малым числом плоских концов // Мат. заметки ЯГУ. 2005. Т. 12, вып. 1. С. 121–133.
7. *Минимальные* поверхности / Под ред. Оссермана Р. М.: Физматлит, 2003.
8. *Дубровин Б. А.* Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ижевск: НИЦ РиХД, 2001.


*г. Якутск* *26 июня 2006 г.*