Минимальные торы в $\mathbb{R}^3$ с малым числом плоских концов *

Э.И. Шамаев †

УДК 514.752.437

1 Введение

В данной статье мы излагаем доказательство следующего

Предложение 1 *Пусть* ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\zeta(u)$ — ζ*-функция Вейерштрасса на торе* $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$, $\sum'$ — *суммирование по множеству* $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *и*

$$a = \frac{2i}{\pi}(\overline{\zeta(\omega_2)}\omega_1 - \overline{\zeta(\omega_1)}\omega_2). \tag{1}$$

Тогда для любого тора $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$ *условие*

$$\begin{cases} |a|^2 - |a|^4 = 20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2 {\sum_{m,n}}'(m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}; \\ |a| > 1, \end{cases} \tag{2}$$

не выполнено.

Казнер и Шмитт в [1] доказали, что не существует полных минимальных торов в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с тремя плоскими концами. Условие (2) является ключевым в доказательстве Казнера и Шмитта — это необходимое условие существования таких торов. Доказательство предложения 1 носит технический характер, поэтому было опущено в [1].

Имеет место

Лемма 1 *Справедливость условия (2) зависит только от конформного класса тора.*

Для краткости мы доказываем лемму 1 иначе чем в [2].

Поскольку каждый тор конформно эквивалентен [2] тору с полупериодами $\omega_1 = 1$ и

$$\omega_2 \in \Omega = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| \geq 1, \frac{1}{2} > \operatorname{Re}\tau \geq -\frac{1}{2}, \operatorname{Im}\tau > 0\},$$

*Работа поддержана РФФИ, грант 03-01-00403.

†НИИ математики, Якутск.

то достаточно доказать утверждение 1 для торов с $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 \in \Omega$.

Пусть $\sigma_1(n)$ и $\sigma_3(n)$ обозначают суммы всех натуральных делителей n в первой и третей степени соответственно. Для $q = e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$ имеют место следующие равенства [2]:

$$\begin{array}{l} 60{\sum_{m,n}}'(m\omega_1 + n\omega_2)^{-4} = g_2 = \frac{\pi^4}{12}\big(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\big), \\ \zeta(\omega_1) = \eta_1 = \frac{\pi^2}{12}\big(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\big). \end{array} \tag{3}$$

Теперь мы представим оба выражения (2) в виде степенных рядов. Константу $\zeta(\omega_2)$ выразим через $\zeta(\omega_1)$ с помощью уравнения Лежандра [2]:

$$\zeta(\omega_2)\omega_1 - \zeta(\omega_1)\omega_2 = \frac{\pi i}{2}.$$

Область Ω рассматриваем как объединение двух областей:

$$\begin{array}{llll} \Omega_1 = \{\tau \in \Omega : & \frac{\sqrt{2}}{2} \leq & \mathrm{Im}\ \tau & < \frac{6}{\pi}(1 - 10^{-3})\}; \\ \Omega_2 = \{\tau \in \Omega : & \frac{6}{\pi}(1 - 10^{-3}) \leq & \mathrm{Im}\ \tau & \}; \end{array}$$

Справедлива

Лемма 2 *Пусть* $\omega_1 = 1$.

Тогда справедливы неравенства

$$\begin{array}{ll} 1) & |a| - 1 < 0, \quad \omega_2 \in \Omega_1; \\ 2) & \big||a|^2 - 1\big| < 10^{-2}, \quad \mathrm{Im}\ \omega_2 \in \Big[\dfrac{6}{\pi}(1 - 10^{-3}), \dfrac{6}{\pi}(1 + 10^{-3})\Big]; \\ 3) & |a| - 1 > 0, \quad \mathrm{Im}\ \omega_2 \in \Big(\dfrac{6}{\pi}(1 + 10^{-3}), \infty\Big). \end{array} \tag{4}$$

Также имеет место

Лемма 3 *При* $\omega_1 = 1$ *и для всех* $\omega_2 \in \Omega_2$ *справедливо*

$$|a|^2 - |a|^4 \neq 20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2{\sum_{m,n}}'(m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}.$$

Из лемм 2 и 3 следует, что предложение 1 справедливо для $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 \in \Omega$. Поэтому из леммы 1 следует предложение 1 для множества всех торов.

2 Доказательство леммы 1

Доказательство леммы 1. Для $\lambda \in \mathbb{C}^*$ справедливо соотношение [2]:

$$\zeta(\lambda\omega_1; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda}\zeta(\omega_1; \omega_1, \omega_2), \tag{5}$$

где $\zeta(u; \omega_1, \omega_2)$ — ζ-функция Вейерштрасса на $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$.

Из (1) и (5) следует, что

$$a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{\lambda}{\overline{\lambda}} a(\omega_1, \omega_2),$$

где $a(\omega_1, \omega_2)$ — постоянная (1) на $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$. Следовательно,

$$|a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)| = |a(\omega_1, \omega_2)|.$$

Рассмотрим правую часть (2). Простые выкладки показывают, что

$$a^2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)(\overline{\lambda\omega}_1\lambda\omega_2 - \overline{\lambda\omega}_2\lambda\omega_1)^2 \sum_{m,n}{}' (m\lambda\omega_1 + n\lambda\omega_2)^{-4} = \tag{6}$$

$$a^2(\omega_1, \omega_2)(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2 \sum_{m,n}{}' (m\omega_1 + n\omega_2)^{-4}.$$

Из (6) и $|a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)| = |a(\omega_1, \omega_2)|$ следует, что на торе $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$ условие (2) верно если и только если (2) верно на торе $\mathbb{C}/\{2\mathbb{Z} + 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\mathbb{Z}\}$. Поэтому далее считаем $\omega_1 = 1$, а ω_2/ω_1 обозначим как τ.

Таким образом, мы установили, что (2) не зависит от преобразования тора $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\} \mapsto \mathbb{C}/\{2\mathbb{Z} + 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\mathbb{Z}\}$, а зависит только от так называемого конформного параметра тора $\tau = \omega_2/\omega_1$.

Рассмотрим группу преобразований тора

$$\tau \mapsto \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}), \tag{7}$$

порожденную двумя своими элементами

$$T_1 : \tau \mapsto \tau + 1, \; T_2 : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}.$$

Покажем, что уравнение (2) не зависит от преобразований вида (7). Для этого достаточно доказать инвариантность (2) относительно T_1 и T_2.

Функции η_1 и g_2 инвариантны относительно $\tau \mapsto T_1\tau$ согласно [2]. Очевидно, выражение

$$\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1 = i2\mathrm{Im}\ \tau \tag{8}$$

и

$$a = \frac{2i}{\pi}(\overline{\zeta(\omega_2)}\omega_1 - \overline{\zeta(\omega_1)}\omega_2) = \frac{4\mathrm{Im}\ \tau}{\pi}\,\overline{\eta}_1 - 1 \tag{9}$$

также инвариантны относительно T_1. Здесь мы воспользовались соотношением Лежандра $\zeta(\omega_2) = \eta_1\tau + \frac{\pi i}{2}$.

Согласно [3], для любого $\mathrm{Im}\ \tau > 0$ справедливы отношения

$$g_2(\tau) = \frac{1}{\tau^4} g_2\Big(-\frac{1}{\tau}\Big); \tag{10}$$

$$\eta_1(\tau) = \frac{1}{\tau^2}\eta_1\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) - \frac{\pi}{2i}\frac{1}{\tau}, \tag{11}$$

где $g_2(\tau)$ и $\eta_1(\tau)$ — постоянные Вейерштрасса (3) на $\mathbb{C}/\{2\mathbb{Z}+2\tau\mathbb{Z}\}$.

Кроме этого, прямыми выкладками получаем равенства:

$$\overline{\omega}_1\omega_2-\overline{\omega}_2\omega_1=2i\mathrm{Im}\ \tau=2i\tau\overline{\tau}\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{\overline{\tau}}\Big)=2i\tau\overline{\tau}\mathrm{Im}\Big(-\frac{1}{\tau}\Big);$$

и

$$a(\tau)=2\tau\overline{\tau}\mathrm{Im}\ \Big(-\frac{1}{\tau}\Big)\Big(\frac{1}{\overline{\tau}^2}\overline{\eta_1(-1/\tau)}+\frac{\pi}{2i}\frac{1}{\overline{\tau}}\Big)-1$$

$$=2\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{Im}\ \Big(-\frac{1}{\tau}\Big)\Big(\overline{\eta}_1\Big(-\frac{1}{\tau}\Big)-1\Big)=\frac{\tau}{\overline{\tau}}a\Big(-\frac{1}{\tau}\Big).$$

Подставив полученные выражения для a и g_2 в уравнение (2), убеждаемся в том, что (2) инвариантно относительно T_2.

Таким образом, (2) инвариантно относительно $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Теперь лемма следует из хорошо известного факта — для любой пары конформно эквивалентных торов с конформными параметрами τ и τ' существует преобразование

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},\quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in PSL(2,\mathbb{Z}).$$

Лемма 1 доказана.

3 Доказательство леммы 2

Из (9) следует, что

$$|a|^2=\frac{16(\mathrm{Im}\ \tau)^2}{\pi^2}|\eta_1|^2-\frac{8\mathrm{Im}\ \tau}{\pi}\mathrm{Re}\ \eta_1+1.$$

Подставим (3) в полученное выражение. Получим, что

$$|a|^2-1=\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big|1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big|^2-\frac{2\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)\Big(1-24\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big). \tag{12}$$

Докажем вспомогательные леммы

Лемма 4 *Для $q\in[0,\varepsilon)$, где $\varepsilon<1$, справедливы равенства:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n=\frac{q}{1-q} \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2q^n=\frac{q+q^2}{(1-q)^3} \tag{14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3q^n=\frac{q+4q^2+q^3}{(1-q)^4} \tag{15}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^5 q^n = \frac{32q^2+51q^3+46q^4-14q^5+6q^6-q^7}{(1-q)^6} \tag{16}$$

Доказательство. Ряд (13)является геометрической прогрессией. Каждый ряд (13)—(16) является степенным с радиусом сходимости 1. Значит, справедливы следующие рекуррентные равенства для $q \in [0, \varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n = q\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n\Big)', \quad k = 1,..,5.$$

Откуда при помощи простых выкладок получаются формулы (13)-(16).

Лемма 4 доказана.

Лемма 5 *Справедливо неравенство*

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n\Big| < \frac{13}{12}|q|, \quad \tau \in \Omega_1 \cup \Omega_2. \tag{17}$$

Доказательство. Для каждого натурального n справедливо неравенство

$$\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d \le \sum_{1 \le d \le n} d = \frac{n(n+1)}{2} \le n^2. \tag{18}$$

Отсюда вытекает следующее неравенство

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n\Big| \le \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |q|^n.$$

По лемме 4 мажорирующий ряд равен $\frac{1+|q|}{(1-|q|)^3}|q|$.

При Im $\tau \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$ производная функции

$$\frac{1+|q|}{(1-|q|)^3} \tag{19}$$

по переменной Im τ отрицательна, и значение (19) меньше 13/12 при Im $\tau = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно,

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n\Big| \le \frac{1+|q|}{(1-|q|)^3}|q| < \frac{13}{12}|q|. \tag{20}$$

Лемма 5 доказана.

Имеет место неравенство

$$|q| < 10^{-5}, \quad \tau \in \Omega_2. \tag{21}$$

Теперь докажем лемму 2.

Доказательство леммы 2. 1) Исследуем знак $|a|^2-1$. Пусть

$$\delta = 24\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big|.$$

Из леммы 5 и (21) следует

$$\delta < 26\cdot 10^{-5},\quad \tau\in\Omega_2.$$

Из (12) получим неравенство

$$|a|^2-1 \le \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\big(1+\delta\big)^2 + 2\frac{\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)\big(-1+\delta\big). \tag{22}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|a|^2-1 \le \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)(1+\delta^2)\left(\mathrm{Im}\ \tau + \frac{6}{\pi}\left(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\right)\right). \tag{23}$$

Поскольку производная функции

$$\mathrm{Im}\ \tau + \frac{6}{\pi}\left(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\right)$$

по $\mathrm{Im}\ \tau$ положительна на Ω_1 и

$$\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}) + \frac{6}{\pi}\left(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\right) < 0,$$

то правая часть (23) отрицательна на Ω_1.

Следовательно, справедливо неравенство $|a|^2-1<0$.

2) Из (12) следует неравенство:

$$\big||a|^2-1\big| \le \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)(1+\delta^2)\left|\mathrm{Im}\ \tau - \frac{6}{\pi}\left(\frac{1-\delta}{(1+\delta)^2}\right)\right|. \tag{24}$$

Для $\mathrm{Im}\ \tau \in \left[\frac{6}{\pi}(1-10^3), \frac{6}{\pi}(1+10^3)\right]$ выражение (24) меньше чем следующее

$$\frac{\pi^2}{9}\frac{6}{\pi}(1+10^{-3})(1+\delta^2)\frac{6}{\pi}\left|1+10^{-3} - \frac{1-\delta}{(1+\delta)^2}\right|. \tag{25}$$

Поскольку $\delta < 26\cdot 10^{-5}$, то (25) оценивается числом

$$8\cdot(10^{-3}+3\cdot 10^{-5}) < 0,9\cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, справедливо неравенство $||a|-1| < 10^{-2}$.

3) Из (12) получим неравенство

$$|a|^2-1 \ge \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\big(1-\delta\big)^2 - 2\frac{\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)\big(1+\delta\big). \tag{26}$$

Знак $|a|^2-1$ положителен для τ таких, что $\mathrm{Im}\ \tau - \frac{6}{\pi}\frac{(1+\delta)}{(1-\delta)^2} > 0$.

Производная функции

$$\mathrm{Im}\ \tau - \frac{6}{\pi}\left(\frac{1+\delta}{(1-\delta)^2}\right)$$

по $\mathrm{Im}\ \tau$ положительна на Ω_2 и

$$\frac{6}{\pi}(1+10^{-3}) + \frac{6}{\pi}\left(\frac{1+\delta}{(1-\delta)^2}\right) > 0,$$

то правая часть (26) положительна на Ω_2.

Следовательно, справедливо неравенство $|a|^2-1>0$, $\tau\in\Omega_2$.

Лемма 2 доказана.

4 Доказательство леммы 3

Из (3) и (9) выводим, что

$$\overline{a}^2 = \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)^2 - \frac{2\pi}{3}\mathrm{Im}(\tau)\Big(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)+1. \quad (27)$$

Имеет место

Лемма 6 *Если $a\neq 0$, то следующие три условия равносильны*

$$20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2-\overline{\omega}_2\omega_1)^2{\sum_{m,n}}'(m\omega_1+n\omega_2)^{-4} = |a|^2-|a|^4, \quad (28)$$

$$20|a|^2(\overline{\omega}_1\omega_2-\overline{\omega}_2\omega_1)^2{\sum_{m,n}}'(m\omega_1+n\omega_2)^{-4} = \overline{a}^2(1-|a|^2), \quad (29)$$

$$\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2 + (|a|^2-1)\left(\frac{2\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)-1\right) =$$

$$= (|a|^2-1)\Bigg(64\pi^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(k)\sigma_1(n-k)\right)q^n - \quad (30)$$

$$-16\pi\Big(\frac{\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)-1\Big)(\mathrm{Im}\ \tau)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Bigg) - \frac{\pi^2}{9}|a|^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big).$$

Доказательство. Умножив (28) на $\overline{a}/a$, получим (29). Следовательно, для $a\neq 0$ условия (28) и (29) эквивалентны.

Подставим выражения (12) и (27) в (29). Получим равенство:

$$|a|^2\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big) = \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2(|a|^2-1)$$

$$+\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(-48\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n+24^2\big(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\big)^2\Big)(|a|^2-1) \tag{31}$$

$$+\Big(1-\frac{2\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau\Big)(|a|^2-1)+\frac{2\pi}{3}24(\mathrm{Im}\ \tau)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)(|a|^2-1).$$

Перегруппировав слагаемые в (31), получим

$$\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(1+|a|^2 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big)+\Big(\frac{2\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)-1\Big)(|a|^2-1)$$

$$=(|a|^2-1)\Bigg(\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2 24^2\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)^2$$

$$\Big(-48\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2+\frac{2\pi}{3}24(\mathrm{Im}\ \tau)\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Bigg).$$

Лемма 6 доказана.

Производная функции $|q|\cdot(\mathrm{Im}\ \tau)^4$ по $\mathrm{Im}\ \tau$ отрицательна на Ω_2. Кроме этого,

$$|q|\cdot(\mathrm{Im}\ \tau)^4<10^{-4} \text{ при } \tau=i\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}).$$

Поэтому справедлива оценка

$$|q|\cdot(\mathrm{Im}\ \tau)^4<10^{-4}, \quad \tau\in\Omega_2. \tag{32}$$

Из (32) вытекает неравенство

$$|q|\cdot(\mathrm{Im}\ \tau)^2<10^{-4}, \quad \tau\in\Omega_2. \tag{33}$$

Докажем техническую

Лемма 7 *Пусть* $\tau\in\Omega_2$.

Тогда справедливы неравенства

$$\Big|\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\Big)q^n\Big| \quad < \quad \frac{21}{10}|q|; \tag{34}$$

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big| \quad < \quad \frac{8}{5}|q|. \tag{35}$$

Доказательство. Для внутренней суммы справедлива оценка

$$\Big|\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\Big|\le\Big|\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2k^2\Big|<\frac{1}{16}n^5.$$

Здесь в каждом слагаемом мы применили оценку $\sigma_1(n) \le n^2$ и заметили, что функция $f(k) = (n-k)^2k^2$ достигает максимума на отрезке $\big[1,(n-1)\big]$ в точке $k = n/2$. Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\Big)|q|^n < \frac{1}{16}\sum_{n=2}^{\infty}n^5|q|^n. \tag{36}$$

Ряд (36) по лемме 4 равен

$$\frac{1}{16}\sum_{n=2}^{\infty}n^5q^n = \frac{32q^2+51q^3+46q^4-14q^5+6q^6-q^7}{16\,(1-q)^6}.$$

Легко проверить справедливость неравенств

$$2 < \frac{32+51q+46q^2-14q^3+6q^4-q^5}{16(1-q)^6} < \frac{21}{10}, \quad \tau\in\Omega_2.$$

Поэтому ряд (36) меньше $\frac{21}{10}|q|$ при $\tau\in\Omega_2$.

Суммы $\sigma_3(n)$, $n\in\mathbb{N}$ оценим следующим образом:

$$\sigma_3(n) = \sum_{d|n}d^3 = \sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^3 \le n^3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$$

$$\le n^3\left(1+\int_1^n\frac{1}{x^3}dx\right) = \frac{3}{2}n^3-\frac{1}{2}n < \frac{3}{2}n^3, \quad n\in\mathbb{N}$$

Воспользовавшись (15), получим

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big| < \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^3|q|^n = \frac{3}{2}\frac{|q|+4|q|^2+|q|^3}{(1-|q|)^4}. \tag{37}$$

Справедливы неравенства

$$0 < \frac{3}{2}\frac{1+4|q|+|q|^2}{(1-|q|)^4} < \frac{8}{5}, \quad \tau\in\Omega_2.$$

Поэтому из (37) следует неравенство (35).

Лемма 7 доказана.

Докажем следующую

Лемма 8 *Пусть* $\tau\in\Omega_2$.

Тогда справедливо неравенство

$$\big||a|^2-1\big| < 5(\mathrm{Im}\ \tau)^2.$$

Доказательство. Для $\mathrm{Im}\ \tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$ лемма 8 следует из утверждения 2) леммы 2. Поэтому считаем, что $\mathrm{Im}\ \tau > \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})$.

Правая часть неравенства (22) меньше

$$\frac{\pi^2}{9}(1+\delta)^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2,$$

поскольку $\frac{2\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)(-1+\delta) < 0$, $\tau \in \Omega_2$. Следовательно, справедливы неравенства

$$|a|^2 - 1 < \frac{\pi^2}{9}(1+\delta)^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2 < 5(\mathrm{Im}\ \tau)^2.$$

Из $|a|^2 - 1 > 0$ следует справедливость неравенства $\big||a|^2 - 1\big| < 5(\mathrm{Im}\ \tau)^2$.

Лемма 8 доказана.

Докажем лемму.

Доказательство леммы 3. Покажем, что при $\tau \in \Omega_2$ абсолютное значение правой части равенства (30) меньше 1, а левой части — больше 3.

Выпишем модуль левой части неравенства (30):

$$\Big|\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2 + (|a|^2-1)\Big(\frac{2\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau - 1\Big)\Big|. \tag{38}$$

Для $\mathrm{Im}\ \tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$ из $||a|^2-1| < 10^{-2}$ (справедливого по лемме 2) вытекает неравенство

$$\big||a|^2-1\big|\Big|\frac{2\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau - 1\Big| < 4\cdot 10^{-2}.$$

Таким образом (38) больше, чем следующее выражение

$$\Big|\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big| - \big||a|^2-1\big|\Big|\frac{2\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau - 1\Big| > 3$$

для $\mathrm{Im}\ \tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$.

Пусть $\mathrm{Im}\ \tau > \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})$. Тогда по лемме 2 справедливо неравенство

$$|a|^2 - 1 > 0.$$

Кроме этого,

$$\frac{2\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau - 1 > 0.$$

Следовательно, выражение (38) больше, чем $\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2 > 3$.

Таким образом, мы показали, что правая часть (30) больше 3 для $\tau \in \Omega_2$.

Выпишем правую часть (30):

$$(|a|^2-1)\Big(64\pi^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Sigma_1 - 16\pi\Big(\frac{\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau - 1\Big)(\mathrm{Im}\ \tau)\Sigma_2\Big) - \Sigma_3, \tag{39}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(k)\sigma_1(n-k)q^n,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n$$

и

$$\Sigma_3 = \frac{\pi^2}{9} (\mathrm{Im}\ \tau)^2 |a|^2 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n.$$

По лемме 7 имеет место неравенство

$$|\Sigma_3| < \frac{384}{9} \pi^2 |a|^2 |q| (\mathrm{Im}\ \tau)^2.$$

Из леммы 8 следует, что $|a|^2 < 1 + 5(\mathrm{Im}\ \tau)^2$. Отсюда

$$|\Sigma_3| < 400|q|(\mathrm{Im}\ \tau)^2 + 2000|q|(\mathrm{Im}\ \tau)^4 < \frac{1}{4}.$$

Поскольку по лемме 7 справедливо

$$|\Sigma_1| < \frac{21}{10}|q|,$$

по лемме 5 имеет место

$$|\Sigma_2| < \frac{13}{12}|q|,$$

и

$$\frac{\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau - 1 > 0,$$

то абсолютное значение (39) меньше следующего выражения:

$$\big||a|^2 - 1\big| \left(64 \frac{21}{10} \pi^2 (\mathrm{Im}\ \tau)^2 |q| + 16 \frac{13}{12} \pi \left(\frac{\pi}{3} (\mathrm{Im}\ \tau)^2 - \mathrm{Im}\ \tau \right) |q| \right) + \frac{1}{4}. \tag{40}$$

Теперь из неравенства

$$64 \frac{21}{10} \pi^2 + 16\pi \frac{13}{12} \frac{\pi}{3} < 1400$$

и леммы 8 вытекает, что (39) меньше чем $7000|q|(\mathrm{Im}\ \tau)^4 + \frac{1}{4}$. Отсюда следует неравенство

$$\left| (|a|^2 - 1) \left(64\pi^2 (\mathrm{Im}\ \tau)^2 \Sigma_1 - 16\pi \left(\frac{\pi}{3} \mathrm{Im}\ \tau - 1 \right) (\mathrm{Im}\ \tau) \Sigma_2 \right) - \Sigma_3 \right| < 1. \tag{41}$$

Следовательно, правая часть равенства (30) не может равняться левой части (30).

Лемма 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kusner R. Schmitt N. *The Spinor Representation of Minimal Surfaces in Space.* University of Massachusetts in Amherst, preprint GANG preprint III.27, 1993.

[2] А. Гурвиц, Р. Курант. Теория функций. — М.: Наука, 1968.

Шамаев Эллэй Иванович
НИИ математики при Якутском гос. университете,
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000
eshamaev@mail.ru
8-924-66-029-77