ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том IV, 2003 г. Выпуск 4. С. 68–73

УДК 514.752.437

Минимальные торы с шестью плоскими концами[1]

Э. И. Шамаев

§ 1. Введение

В данной статье мы строим трехпараметрическое семейство минимальных погружений тора с шестью выколотыми точками в $\mathbb{R}^3$. В окрестности выколотых точек тор асимптотически выглядит как плоскость. Поверхность с таким поведением в окрестностях выколотых точек называется поверхностью с плоскими концами.

Известный функционал Уиллмора, известный еще Бляшке и Томсону как конформная площадь, имеет вид $\int(H^2-K)d\mu$, где K и H — гауссова и средняя кривизны поверхности. Критические точки этого функционала называются уиллморовскими поверхностями. Примеры таких компактных поверхностей получаются как образы минимальных поверхностей с плоскими концами под действием инверсии. При этом плоские концы перейдут в кратную точку поверхности. Так получаются все уиллморовские сферы [1] и важный класс уиллморовских торов, называемых суперминимальными.

До последнего времени было известно, что

1) не существует минимальных плоских торов с $k \leq 3$ концами [2];

2) существуют минимальные плоские торы с четырьмя концами (С. Коста [3], см. также [2]).

Автор благодарит И.А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения и А.Е. Миронова за полезные обсуждения и советы.

§ 2. Основная конструкция

Основным инструментом в нашей конструкции является представление Вейерштрасса, а именно, пусть U односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с координатой z.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант 03-01-00403.

Тогда представление Вейерштрасса

$$\Phi(z) = \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : U \to \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

где $\varphi_1 = f(1-g^2)\,dz$, $\varphi_2 = if(1+g^2)\,dz$, $\varphi_3 = 2fgdz$ — голоморфные 1-формы на U, $z_0 \in U$ — фиксированная точка, задает минимальное погружение U в $\mathbb{R}^3$ (см., например, [4]). Главная трудность в использовании представления Вейерштрасса для построения минимальных погружений римановых поверхностей с плоскими концами состоит в том, что у 1−форм φ_1, φ_2 и φ_3, задающих представление Вейерштрасса, должны быть нулевые вычеты в выколотых точках, и периоды (интегралы по циклам) также должны быть нулевыми. Иначе результат интегрирования зависит от выбора пути от z_0 до z, и представление Вейерштрасса не будет корректно определено на римановой поверхности.

Основной результат работы заключается в следующем. Пусть риманова поверхность Γ рода 1 задана в $\mathbb{C}^2$ уравнением:

$$w^2 = P(z) = 4(z-z_1)(z-z_2)(z-\overline{z}_2), \tag{2}$$

где $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $0 < |\overline{z}_2 - z_2| < |z_1 - z_2|$. Выберем мероморфные 1-формы на Γ следующим образом

$$\varphi_1 = \frac{h^2(z)-1}{(z-a)^2w^3}dz, \quad \varphi_2 = i\frac{h^2(z)+1}{(z-a)^2w^3}dz, \quad \varphi_3 = \frac{2h(z)}{(z-a)^2w^3}dz, \tag{3}$$

где

$$h(z) = \frac{1}{b}((z-a)^3 + c(z-a)^2 + d),$$

a — один из корней уравнения $P'(z) = 0$. Дискриминант полинома $P'(z)$ равен $|z_1 - z_2|^2 - |\overline{z}_2 - z_2|^2$, поэтому число a — вещественное в силу ограничений на z_1 и z_2.

Для того, чтобы представление Вейерштрасса задавало минимальное погружение с плоскими концами необходимо, чтобы φ_1, φ_2 и φ_3 имели в выколотых точках полюса только второго порядка [3]. В нашем случае φ_1, φ_2 и φ_3 имеют полюса второго порядка в точках ветвления $p_1 = (0, z_1)$, $p_2 = (0, z_2)$, $p_3 = (0, \overline{z}_2)$, $p_4 = \infty$, а также в $p_5 = (w_a, a)$ и $p_6 = (-w_a, a)$, где $w_a = \sqrt{P(a)}$.

На Γ определены голоморфная и антиголоморфная инволюции:

$$\sigma : (w, z) \mapsto (-w, z), \quad \tau : (w, z) \mapsto (\overline{w}, \overline{z}).$$

Представим Γ как две плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ («нижний» и «верхний» лист) с разрезами по отрезкам $[z_1, \infty]$ и $[z_2, \overline{z}_2]$. Выберем циклы γ_1 и γ_2 как показано на рис. 1. Многоточием обозначены части циклов, расположенные на «нижнем» листе римановой поверхности.

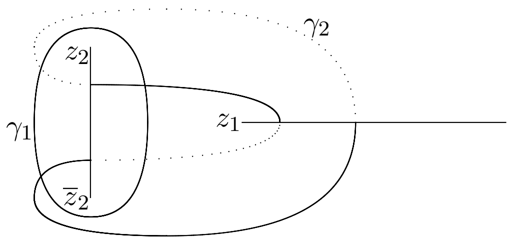

Рис. 1

Они образуют базис в $H_1(\Gamma;\mathbb{Q})$, который не является каноническим (не является базисом над $\mathbb{Z}$) и преобразуется инволюцией τ по формулам:

$$\tau\gamma_1 = \gamma_1, \quad \tau\gamma_2 = -\gamma_2.$$

Выберем постоянные b, c и d следующим образом

$$b = \sqrt{\frac{1}{\Sigma_{-2}}\left(\Sigma_4 + 2c\Sigma_3 + c^2\Sigma_2 + 2d\Sigma_1 + 2cd\Sigma_0 + d^2\Sigma_{-2}\right)} \tag{4}$$

$$c = \frac{\Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 - \sqrt{\Delta}}{\Sigma_2\Pi_{-2} - 2\Sigma_0\Pi_0 + \Sigma_{-2}\Pi_2}, \tag{5}$$

$$d = -\frac{1}{\Sigma_{-2}}(\Sigma_1 + \Sigma_0 c), \tag{6}$$

где Δ — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 & \Sigma_2\Pi_{-2} - 2\Sigma_0\Pi_0 + \Sigma_{-2}\Pi_2 \\ \Sigma_4\Pi_{-2} - 2\Sigma_1\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_4 & \Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 \end{pmatrix},$$

и

$$\Sigma_k = \int_{\gamma_1} \frac{(z-a)^k}{w^3}\,dz, \quad \Pi_k = \int_{\gamma_2} \frac{(z-a)^k}{w^3}\,dz, \;\; k = -2, 0, \ldots, 4.$$

Ниже мы покажем, что Σ_k — вещественные числа, Π_k — чисто мнимые. Справедлива

Теорема 1. *Вычеты мероморфных 1-форм φ_1, φ_2 и φ_3 в полюсах $p_1, \ldots, p_6$ равны нулю. Если a, b, c и d — вещественные числа, то имеют место равенства*

$$Re \int_{\gamma_m} \varphi_k = 0, \quad m = 1, 2;\; k = 1, 2, 3; \tag{7}$$

и, следовательно, отображение $\Phi(w, z)$ корректно определено на Γ.

Отметим, что φ_1, φ_2 и φ_3 одновременно не обращаются в нуль, поэтому Φ является погружением.

Согласно лемме 2 числитель и знаменатель в формуле (5) суть чисто мнимые. Поэтому число c является вещественным, если $\Delta < 0$. Таким образом, по лемме 2 числа b, c и d — вещественные, если

$$\frac{1}{\Sigma_{-2}}\big(\Sigma_4 + 2c\Sigma_3 + c^2\Sigma_2 + 2d\Sigma_1 + 2cd\Sigma_0 + d^2\Sigma_{-2}\big) > 0, \quad \Delta < 0. \tag{8}$$

Для $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1+i}{2}$ вычисления на компьютере показывают, что

$$\frac{1}{\Sigma_{-2}}\big(\Sigma_4 + 2c\Sigma_3 + c^2\Sigma_2 + 2d\Sigma_1 + 2cd\Sigma_0 + d^2\Sigma_{-2}\big) \approx 0.3966.., \quad \Delta \approx -3.805... \tag{9}$$

Условие вещественности b, c и d аналитически зависит от z_1 и z_2. Следовательно, отображение Φ для $(z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ достаточно близких к $(1, -\frac{1+i}{2}\ )$ задает минимальное погружение

$$\Phi : \Gamma \setminus \{p_1, \dots, p_6\} \to \mathbb{R}^3$$

с шестью плоскими концами.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Теорема 1 вытекает из лемм 1-3. В лемме 1 мы докажем, что 1-формы φ_1, φ_2 и φ_3 имеют полюсы только второго порядка с нулевыми вычетами. Из леммы 2 следует, что $\mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_1 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_2 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_3 = 0$. В лемме 3 докажем, что $\mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_1 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_2 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_3 = 0$.

Справедлива

Лемма 1. *1-формы φ_1, φ_2 и φ_3 имеют полюсы второго порядка с нулевыми вычетами в $p_1, \dots, p_6$. Других полюсов нет.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство нулю вычетов в точках $p_1, \dots, p_4$ следует из очевидного равенства

$$\sigma^*\varphi_k = -\varphi_k, \ k = 1, 2, 3$$

и из того, что точки $p_1, \dots, p_4$ являются неподвижными при инволюции σ.

Пусть $t = z - a$ локальный параметр в окрестности точек p_5 и p_6. Тогда

$$\frac{dz}{(z-a)^2 w^3} = P(a)^{-3/2}\frac{dt}{t^2} + \frac{d}{dt}\Big(P(t+a)^{-3/2}\Big)\Big|_{t=0}\frac{dt}{t} + O(1).$$

Поэтому $\mathrm{Res}_{p_5}\frac{dz}{(z-a)^2 w^3} = -\mathrm{Res}_{p_6}\frac{dz}{(z-a)^2 w^3} = 0$, так как $P'(a) = 0$.

Следовательно, $\mathrm{Res}_{p_j}\varphi_k = 0$, $j = 5, 6$, $k = 1, 2, 3$.

Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *Пусть 1-форма φ такая, что*

$$\tau^* \varphi = \overline{\varphi}.$$

Тогда период φ по циклу γ_1 является вещественным, а по циклу γ_2 — чисто мнимым числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из равенств:

$$\int_{\gamma_1} \varphi = \int_{\tau\gamma_1} \varphi = \int_{\tau\tau\gamma_1} \tau^* \varphi = \overline{\int_{\gamma_1} \varphi};$$

$$\int_{\gamma_2} \varphi = \int_{-\tau\gamma_2} \varphi = \int_{-\tau\tau\gamma_2} \tau^* \varphi = -\overline{\int_{\gamma_2} \varphi}.$$

Лемма 2 доказана.

Для 1-форм φ_1, $i\varphi_2$ и φ_3 с вещественными a, b, c и d выполнено условие леммы 2, поэтому

$$\mathrm{Re} \int_{\gamma_2} \varphi_1 = \mathrm{Re} \int_{\gamma_2} \varphi_3 = \mathrm{Re} \int_{\gamma_1} \varphi_2 = 0.$$

Справедлива

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$Re \int_{\gamma_1} \varphi_1 = Re \int_{\gamma_2} \varphi_2 = Re \int_{\gamma_1} \varphi_3 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из $d = -\frac{1}{b}(\Sigma_1 + \Sigma_0 c)/\Sigma_{-2}$ следует, что

$$\mathrm{Re} \int_{\gamma_1} \varphi_3 = \Sigma_1 + \Sigma_0 c + \Sigma_{-2} d = 0.$$

Выбор $b^2 = \frac{1}{\Sigma_{-2}}\big(\Sigma_4 + 2\Sigma_3 c + \Sigma_2 c^2 + 2\Sigma_1 d + 2\Sigma_0 cd + \Sigma_{-2} d^2\big)$ обнуляет

$$\mathrm{Re} \int_{\gamma_1} \varphi_1 = \frac{1}{b^2}\Bigg(\Sigma_4 + 2\Sigma_3 c + \Sigma_2 c^2 + 2\Sigma_1 d + 2\Sigma_0 cd + \Sigma_{-2} d^2\Bigg) - \Sigma_{-2}.$$

Подставив значения d, b^2 в

$$\mathrm{Re} \int_{\gamma_2} \varphi_2 = \frac{1}{b^2}\Bigg(\Pi_4 + 2\Pi_3 c + \Pi_2 c^2 + 2\Pi_1 d + 2\Pi_0 cd + \Pi_{-2} d^2\Bigg) + \Pi_{-2},$$

получим следующий квадратичный трехчлен

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} \textstyle\int_{\gamma_2} \varphi_2 = {} & \big(\Sigma_2 \Pi_{-2} - 2\Sigma_0 \Pi_0 + \Sigma_{-2} \Pi_2\big) c^2 + \\ & + \big(\Sigma_3 \Pi_{-2} - \Sigma_1 \Pi_0 - \Sigma_0 \Pi_1 + \Sigma_{-2} \Pi_3\big) c + \Sigma_4 \Pi_{-2} - 2\Sigma_1 \Pi_1 + \Sigma_{-2} \Pi_4 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Значение c является корнем (10).

Лемма 3 доказана.

Литература

[1] *R. L. Bryant*, A duality theorem for Willmore surfaces, J. Differential Geometry **20** (1984), 23–53.

[2] *R. Kusner, N. Schmitt*, The spinor representation of minimal surfaces, Preprint, arXiv:dg-ga/9512003v1.

[3] *C. Costa*, Complete minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ of genus one and four planar embedded ends, Preprint, 1990.

[4] *И. А. Тайманов*, Лекции по дифференциальной геометрии, Ижевск, Ин-т компьютерных исследований, 2002.