

## Задачи с параметрами. Иррациональные уравнения.

41. Для каждого  $a$  решите уравнение  $\sqrt{5-x} = a$ .  
 42. Для  $\forall a$  решите уравнение  $\sqrt{a^2 - x^2} = 2 - a$ .  
 43. Для  $\forall a$  решите уравнение  $\sqrt{x^2 - 1} = ax$ .  
 44. Для  $\forall a$  решите уравнение  $\sqrt{16 - x^2} = a - x$ .  
 45. Для  $\forall a$  решите  $\sqrt{x^2 - 4x - 12} = (x + 2a)(x - 6)$ .  
 46. Для  $\forall a$  решите неравенство  $\sqrt{x - 2} \geq a$ .  
 47. Для  $\forall a$  решите неравенство  $\sqrt{x - 2} \geq x + a$ .  
 48. Для  $\forall a$  решите уравнение  $\sqrt{2 - x} + 3 = ax^2$ .  
 49. При каких  $a$   $\sqrt{(x - 2)^2 - (x - a) + 4} -$  четная?  
 50. Для  $\forall a$  решите уравнение  $\sqrt{|x| + 1} - \sqrt{|x|} = a$ .

### Иррациональные уравнения ►► полиномиальные уравнения с условием ■

71. Найдите все  $a$  такие, что существующие корни уравнения  $x^2 + 3x + 1 + a = 0$  меньше  $-1$ .  
 72. Найдите все  $a$  такие, что существующие корни уравнения  $-x^2 - 6x + 1 + a = 0$  меньше  $9$ .  
 73. Для каждого  $a$  решите уравнение  $\sqrt{5 - x + a} = -x - 2$ . 74. Для  $\forall a$  решите уравнение  $\sqrt{3x - a} = x + 2$ .  
 75. При каких  $a$  уравнение  $x^2 - 4ax + 2a^2 = 0$  имеет два корня, ровно один из которых больше  $2a + 1$ ?  
 76. При каких  $a$  уравнение  $\sqrt{16 - x^2} = x - 4a$  имеет единственный корень?  
 77. При каких  $a$  уравнение  $\sqrt{x + a} = x + 2a$  имеет ровно два корень?  
 78. Найдите  $a$  такие, что уравнение  $\sqrt{5x^2 + 6ax - 27a^2} = x + 3a$  имеет ровно два решения.  
 79. Для каждого  $a$  решите уравнение  $\sqrt{3ax + 4a^2} = x + 2a$ .  
 80. При каких  $a$  уравнение  $\cos^2 x + \cos x = a^2 + a$  имеет хотя бы одно решение.

### Тригонометрические уравнения ►► полиномиальные уравнения с условием ■

1. Для каждого  $a$  найдите множество значений функции  $f(x) = ax^2 + 1$ .  
 2. Найдите множество значений функции  $f(x) = x^2 + 2ax$  при  $x \in [-1; 1]$ . Используйте функцию  $\max$ .  
 3. При каких  $a$  и  $b$  уравнение  $f(x) = x^2 + ax + b$  при  $x \in [-1; 1]$  имеет хотя бы одно решение?  
 4. При каких  $a$  и  $b$  хотя бы один корень уравнения  $f(x) = x^2 + ax + b$  лежит на отрезке  $[-1; 1]$ ?  
 5. При каких  $a$  уравнение  $\cos^2 3x - 2(a + 2) \cos 3x - 2a - 5 = 0$  имеет хотя бы одно решение?  
 6. При каких  $a$  уравнение  $\cos^2 3x - (a + 1) \cos 3x + 2a = 0$  имеет хотя бы одно решение?  
 7. При каких  $a$  уравнение  $3 \cos^2 x - (3a + 10) \cos x + 10a = 0$  не имеет решений?

### Тригонометрические уравнения ►► полиномиальные уравнения с условием ■

81. Найдите все  $a$  такие, что уравнение  $x^2 - 4x + a = 0$  имеет два корня и один из корней меньше  $-2$ .  
 82. Найдите все  $a$  такие, что многочлен  $-x^2 + 2x + a = 0$  имеет хотя бы один корень из  $[1; 2]$ .  
 83. Для каждого  $a$  найдите множество значений функции  $f(x) = ax^2 + 8a^2x + 4$ .  
 84. Найдите множество значений функции  $f(x) = x^2 + 8a^2x + a$  при  $x \in [-1; 1]$ . Используйте функцию  $\max$ .  
 85. При каких  $a$  уравнение  $\cos x = a$  не имеет решений? А  $\operatorname{tg} x = a$ ?  
 86. При каких  $a$  уравнение  $\cos^2 x + (2 + a) \cos x + 2a = 0$  имеет хотя бы одно решение?  
 87. При каких  $a$  уравнение  $2 \cos^2 x + 3 \cos x + a + 1 = 0$  имеет хотя бы одно решение?  
 88. При каких  $a$  уравнение  $\cos^4 3x - 2(a + 1) \cos^2 3x - 2a - 3 = 0$  имеет хотя бы одно решение?  
 89. При каких  $a$  уравнение  $2 \cos^2 x - (2a + 9) \cos x + 9a = 0$  не имеет решений?  
 90. При каких  $a$  уравнение  $-20 \sin^2 x = (a^2 + 13a + 20) \sin x$  имеет ровно четыре корня на  $[0; 2\pi]$ ?

### Домашняя контрольная работа по параметрическим уравнениям

**Задание 1.** Перепишите задания 91-94 в виде параметрических задач на многочлены.

91. При каких  $a$  уравнение  $\cos^2 x + (1 + a) \cos x + (2a + 1) = 0$  имеет хотя бы одно решение?  
 92. Для каждого  $a$  решите уравнение  $\sqrt{x + 2a} = x + 1$ .  
 93. При каких  $a$  уравнение  $\sqrt{2ax + 2a + 1} = -x$  имеет ровно один корень?  
 94. При каких  $a$  уравнение  $\sin^2 x + (1 + a) \sin x + a = 0$  имеет хотя бы одно решение на отрезке  $[\pi/6; 2\pi/3]$ ?  
 95. Для каждого  $a$  решите уравнение  $(1 + a)x^2 + 2ax + 3 = 0$ .  
 96. При каких  $a$  оба корня уравнения  $(1 + a)x^2 + 2ax + 3 = 0$  существуют и положительны?

**Задание 2.** Решите все задачи с толком и расстановкой.

### В пятницу контрольная на тему «Задачи с параметрами»!!!

101. НГУ 1982. При каких  $a$  хотя бы один корень уравнения  $x^2 + 2(a - 1)x + 3a + 1 = 0$  меньше  $1$ ?  
 102. НГУ 1984. При каких  $a$  уравнение  $(a^2 + 1) \sin^2 x + 2a^2 \sin x + 1/2 = 0$  имеет хотя бы одно решение?  
 103. МГУ ХФ 2003. При каких  $b$  уравнение  $(b + 1)x^2 + (b + 2)x + 1 = 0$  имеет единственное решение?  
 104. МГУ ПФ 1993. Когда  $(a - 1)x^2 - (2a + 1)x + 2 + 5a = 0$  имеет ровно два корня и оба корня больше  $1$ ?  
 105. МГУ ФФ 2002. При каких  $a$  уравнение  $(x^2 - (a + 8)x - 6a^2 + 24a)\sqrt{3 - x} = 0$  имеет единственное решение?  
 106. МГУ ФП 1995. При каких  $a$  уравнение  $2 \cos 2x - 4a \cos x + a^2 + 2 = 0$  не имеет решений?  
 107. МГУ ЭФ 1995. При каких  $a$  уравнение  $x - 2 = \sqrt{2(b - 1)x + 1}$  имеет единственное решение?  
 108. МГУ ГФ 2003. При каких  $a$  уравнение  $2\pi^2(x - 2)^2 + 4a \cos(2\pi x) - 25a^3 = 0$  имеет единственное решение?

### КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА НА ТЕМУ: ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

#### ВАРИАНТ 1.

1. При каких значениях параметра  $a$  число  $2$  находится между корнями уравнения  $x^2 + (4a + 5) \cdot x + 3 - 2a = 0$ ?  
 2. ЯГУ. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $2 \cdot \cos^2 x + \cos x - a = 0$  имеет корни?  
 3. МАТИ. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $3\sqrt{x + 2} = 2x + a$  имеет корни?  
 4. МГУ ХФ 2003. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a - 1) \cdot x^2 + 2(2a - 3) \cdot x - (3a - 4) = 0$

имеет единственный положительный корень?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА НА ТЕМУ: ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

ВАРИАНТ 2.

1. ЯГУ. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$5 \cos^2 x + 2 \cdot \cos x - a = 0$$

не имеет корней?

2. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $3\sqrt{x+2} = 2x + a$  имеет корни?

3. ВГУ. Найти все значения параметра  $b$  такие, что оба корня уравнения  $x^2 - 2bx - 1 = 0$  действительны и не превосходят по модулю 2?

4. МГУ ХФ 2003. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$(a - 1) \cdot x^2 + 2(2a - 5) \cdot x - (3a - 7) = 0$$

имеет единственный положительный корень?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА НА ТЕМУ: ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

ВАРИАНТ 1.

1. При каких значениях параметра  $a$  число 0 находится между корнями уравнения

$$x^2 + (3a + 2)x + 3 - 2a = 0?$$

2. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $4 \sin^2 x + \sin x - a = 0$  имеет хотя бы один корень?

3. При каких значениях параметра  $a$  все корни уравнения  $ax^2 - (2a + 1)x + 3a - 1 = 0$  больше 1?

4. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $y = (a + 1)x^2 - 2ax + 4a$  имеет с осью  $Ox$  две общие точки?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА НА ТЕМУ: ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

ВАРИАНТ 2.

1. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$5 \cos^2 x + 2 \cos x - a = 0$$

не имеет корней?

2. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $3\sqrt{x-2a} = 2x + a - 1$  имеет ровно один корень?

3. При каких значениях параметра  $a$  корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $(3a + 2)x^2 + (a - 1)x + 4a + 3 = 0$  удовлетворяют условиям  $x_1 < -1 < x_2 < 1$ ?

4. При каких значениях параметра  $p$  отношение корней уравнения  $2x^2 + (p - 10)x + 6 = 0$  равно 12?