## треугольники

В следующих двух задачах $ABC$ — прямоугольный треугольник с прямым углом $C$.

**1.** Найти сторону $AC$, зная $AB = 1$ и $BC = 0,8$. **2.** Найти сторону $AB$, зная $AC = 0,3$ и $BC = 0,4$.

**3.** Пусть $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, вписанный в окружность радиуса 1. Найти $AB$.

**4.** Пусть $A$, $B$ и $C$ лежат на окружности $S$. Доказать, что если $AC$ — диаметр окружности, то $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$. Формула для площади $S$ прямоугольника: $S = ah$.

**5.** Докажите формулу для площади параллелограмма: $S = ah$.

**6.** Докажите формулу для площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ah$, $h$ — высота треугольника опущенная на сторону $a$.

**7.** Докажите формулу для площади трапеции: $S = \frac{a+b}{2}h$, где $a$ и $b$ – основания трапеции, $h$ — высота трапеции.

**8.** Пусть $M$ — середина стороны $AB$ треугольника $ABC$. Докажите, что $CM = AB/2 \Leftrightarrow \angle ACB = \frac{\pi}{2}$.

**9.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой. Докажите, что радиус вписанной окружности равен $(a+b-c)/2$ и радиус вневписанной окружности, касающейся стороны $AB$, равен $(a+b+c)/2$.

**10.** Если $AD$ — биссектриса угла $A$ треугольника $ABC$, то $BD : CD = AB : AC$.

## косинусы и синусы

**11.** Переведите величины углов в радианы: $18°$; $40°$; $21°15'$.

**12.** Найдите корни уравнений: $\cos x = -1$; $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin x = -\frac{1}{2}$; $\sin x = 1$; $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**13.** Решите уравнения: $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x = 0$; $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{1}{2}$; $\sin(\pi - 2x) = -\frac{1}{2}$; $2\sin 2x = -1$; $2\cos(2x) - \sqrt{3} = 0$.

**14.** Существует ли $\alpha$ такой, что $\cos\alpha = 0,8$ и $\sin\alpha = 0,6$; $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$?

**15.** Зная, $\cos\alpha = 0,1$ и $\pi < \alpha < 2\pi$, найдите $\sin\alpha$. **15 а.** Зная, $\sin\alpha = 0,3$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, найдите $\cos\alpha$.

**16.** Докажите формулу для площади треугольника: $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$.

**17.** Пусть $ABC$ — равнобедренный треугольник ($AB = AC$) с углом $\alpha$ при вершине $A$. Докажите, что $BC = 2 \cdot AB \cdot \sin\dfrac{\alpha}{2}$. **18.** (**Теорема синусов**). Докажите, что **а)** $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; **б)** $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$, где $R$ — радиус описанной окружности.

**19.** Докажите, что **а)** $c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$; **б)** $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

**20.** (**Теорема косинусов**). Докажите, что $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

## тригонометрические уравнения

**21.** Имеют ли корни уравнения $\cos x = \sqrt{2}$; $\sin x = 2 + a^2$; $\sin x = \sqrt{7} - \sqrt{3}$? **22.** Решите: $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$; $2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$; $\sin^2 x + 2\sin x = -1$; $2\cos x(\cos x + \sqrt{2}) + 1$; $2 + 2\sin x = \cos^2 x$.

**23.** Пусть $\cos x + \sin x = \lambda$. Не вычисляя $\sin x$ и $\cos x$, на найдите $\sin^3 x + \cos^3 x$; $\sin^4 x + \cos^4 x$.

**24.** Найдите знаки выражений $\sin\frac{7\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4}$; $\sin\frac{5\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{4}$; $\sin(1,3)\cos(-1,5)\cos(-1,9)$; $\cos\sqrt{10}$.

**25.** Что больше $\sin 23°$ или $\sin 36°$; $\sin 310°$ или $\sin 347°$; $\cos\frac{\pi}{11}$ $\sin\frac{\pi}{11}$; $\sin 16°$ или $\cos 375°$?

**26.** Вычислите $\cos\left(6\frac{5\pi}{6}\right)$; $\sin\left(\frac{43\pi}{6}\right)$; $\cos\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$; $\sin\left(-\frac{38\pi}{3}\right)$; $\cos 1140°$; $\sin(-765°)$. А $\cos 72°$?

**27.** Докажите формулу: $R = \frac{abc}{4S}$, где $a, b, c$ — стороны треугольника, $S$ — его площадь, $R$ — радиус описанной окружности. **28.** Используя скалярное произведение $(v, w) = v_x w_x + v_y w_y$ и равенство $(v, w) = |v|\,|w|\cos\widehat{(v, w)}$, докажите, что $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

**29.** Докажите, что $\sin\alpha + \cos\alpha \leqslant \sqrt{2}$ для любого угла $\alpha$. **30.** Докажите неравенство $\sin x < x$ для $x > 0$.

## тригонометрические уравнения

**31.** Решите уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; **32.** $1 + \sin t = 0$; $\cos(y + \pi) = 0$;

**33.** Решите уравнения $\cos^3 t = \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\sin^{2007} y = 0$; **34.** $1 - \sin^2 x = 0$; $\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$;

**35.** Докажем, что угол $\sqrt{5}$ радиан лежит во второй четверти. С одной стороны, $\sqrt{5} < \pi$, поскольку $5 < 9 = 3^2 < \pi^2$. С другой стороны, т.к. $(\frac{\pi}{2})^2 < (\frac{4}{2})^2 < 4 < 5$, то $\frac{\pi}{2} < \sqrt{5}$. Покажите, что $\sqrt{15}$ лежит в третьей четверти. Докажите, если сможете, что $\sqrt{10}$ лежит в третьей четверти.

**36.** Что больше $\cos 43°$ или $\cos 44°$; $\sin 92°$ или $\sin 88°$; $\cos 12°$ или $\sin 12°$; $\cos 16°$ или $\sin 375°$?

**37.** Вычислите $\cos 105° = \cos(60° + 45°)$; $\cos 75° = \cos(45° + 30°)$; $\cos 285°$; $\cos(x + 90°)$; $\cos(x - 90°)$.

**38.** Радиус земли приблизительно равен 6400 км. Приемник GPS на экваторе определяет координаты с точностью до секунды $0°0'1''$. Сколько это в километрах? **39.** Найдите $2\sin^2 10° + \sin 70°$.

**40.** Для натурального $n$ докажите равенство: $\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{2\cdot 2\pi}{n} + \sin\frac{3\cdot 2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n} = 0$;

### тригонометрические уравнения

**41.** Решите уравнения $\cos^2 x - \cos x = 0$; $(1-2\sin x)(3-2\sqrt{3}\sin x) = 0$; $3\sin^2 x = \cos^2 x$;

**42.** На единичной окружности отметьте точки, соответствующие углу приблизительно 5; 0,05; 1,5 радиан.

**43.** Докажите равенства $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

**44.** Решите уравнение $\sin^2 x\cdot(\sin^2 + 2\sin x + 5) - \cos^2 x\cdot(\sin^2 x + 2\sin x + 5) = 0$.

**45.** Решите уравнение $\sin^2 x = \cos^2 x$; $\sin^4 x = \cos^4 x$; **46.** Выразите $\sin 3x$ и $\cos 3x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

**47.** Определите четность функций $x$; $x^2$; $x^3$; $x\cos x$; $\cos x + x\sin x$; $1 + x^2 + \cos x$.

**48.** Решите уравнение $\sqrt{3} = 4\sin x\cos x$; $\sin x = \sin 2x$; $\sin x = \cos 2x$; **49.** Решите $\sin x = \sin y$.

**50.** Даны многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, причем $Q(0) = 0$. Известно, что функция $P(Q(x))$ четная. Докажите, что функция $Q(x)$ либо четная, либо нечетная.

### тригонометрические уравнения

**51.** Решите уравнения $4\cos x - 4\cos^2 x = 1$; $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{1}{4}$; $3\sin x\cdot\cos 2x = 0$;

**52.** Решите уравнения $\cos^2(\frac{\pi}{2} + x) = -2 + 2\cos x$; $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = 1 + 2\cos x$; $\cos^2 x - \sin^2 x = 0,5$.

**53.** Решите уравнения $\sin^3 2x = \sin^2 2x$; $\sin x\cos x = 0,25$; $1 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}$.

**54.** Что больше $\sin 75^\circ$ или $\sin 76^\circ$; $\cos 31^\circ$ или $\cos 30^\circ$; $\cos 137^\circ$ или $\cos 135^\circ$; $\cos 92^\circ$ или 0?

**55.** Что больше $\sin 175^\circ$ или $\sin 176^\circ$; $\cos 281^\circ$ или $\cos 280^\circ$; $\cos 253^\circ$ или $\cos 254^\circ$; $\cos 59^\circ$ или 0,5 ?

**56.** Найдите знак выражения $\sin 9,5\cos 12,5$. **57.** Определите знак выражения $\sin\sqrt{10}\cos\sqrt{2,5}$.

**58.** Диагонали **а**) выпуклого; **б**) невыпуклого четырехугольника равны $d_1$ и $d_2$, а угол между ними равен $\alpha$. Докажите, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$.

**59.** $\alpha, \beta, \gamma$ — углы остроугольного треугольника. Докажите, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \frac{3}{2}$.

**60.** Докажите, что $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

### тригонометрические уравнения

**61.** Решите уравнения $\cos x = 0,4$; $\cos x = -\sqrt{3}/2$; $\cos x = 2 - \sqrt{3}$, используя функцию $\arccos$.

**62.** Решите уравнения $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$; $a\cos^2 x + d\sin^2 x + b\cos x + c = 0$;

**63.** Упростите $\sin(4,25)\cos(1,11) - \sin(1,11)\cos(4,25)$.

**64.** Упростите $\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha - \cos(\alpha+\beta)\cos\alpha$; $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

**65.** Упростите $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ$; $\cos(\alpha+\beta)\sin\beta - \sin(\alpha+\beta)\cos\beta$.

**66.** Упростите $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$; $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$. **67.** Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$, зная $\cos\alpha$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**68.** Дано, что $\sin x = \frac{7}{25}$, $\sin t = \frac{11}{61}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите $\sin(x+t)$; $\cos(x-t)$.

**69.** Отрезки, соединяющие точку внутри выпуклого $n$-угольника с его вершинами, образуют со сторонами $n$-угольника углы $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$, …, $\alpha_n$, $\beta_n$ (углы перечислены в порядке обхода против часовой стрелки). Докажите, что $\sin\alpha_1\sin\alpha_2\ldots\sin\alpha_n = \sin\beta_1\sin\beta_2\ldots\sin\beta_n$. **70.** (**Тригонометрическая форма теоремы Чевы**). Три луча, выходящие из вершин треугольника, разбивают его углы на углы $\alpha_1$ и $\beta_1$, $\alpha_2$ и $\beta_2$, $\alpha_3$ и $\beta_3$ (в порядке обхода). Докажите, что эти лучи пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 = \sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3$.

### тригонометрические уравнения

**71.** Решите уравнения $\cos x = 1$; $\cos x = \sqrt{3}/2$; $\cos x = 0,7$; $\cos x = -\sqrt{5}/7$; $\cos x = -0,3$.

**72.** Решите уравнения $\sin x = 1$; $\sin x = \sqrt{3}/2$; $\sin x = 0,1$; $\sin x = -\sqrt{7}/5$; $\sin x = -0,4$.

**73.** Зная, что $\alpha$ содержится в **третьей четверти** и $\cos\alpha = -0,4$, найдите $\sin\alpha$.

**74.** Докажите, что $\cos 4,1\cdot\sin 5,3 > 0$, используя оценку $3,1 < \pi < 3,2$ или $3,14 < \pi < 3,15$.

**75.** Решите уравнения $8 - 6\,x - 3\,x^2 + x^3 = 0$; $2 - x - 2\,x^2 + x^3 = 0$.

**76.** Решите уравнение $(2x-3)(3x+4)(x^2-7) = 0$; $(4-x)(3x^2+4x+1)(x^2+1) = 0$.

**77.** Функция $f(x)$ имеет корни $a_1, \ldots a_n$ и $g(x)$ имеет корни $b_1, \ldots b_k$.
Выпишите корни уравнений $f(x)\cdot g(x) = 0$, $f^2(x) + g^2(x) = 0$ и $f^{2007}(x) = 0$.

**78.** Решите уравнение $(1-2\cos x)(3+2\sqrt{3}\sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$.

**79.** Решите уравнение $\cos x + 2\sin x = 0$; $\cos x - \sin x = 0$; $\cos x + \sin x = 0$.

**80.** Упростите выражение $\frac{\sin 56^\circ\cdot\sin 124^\circ - \sin 34^\circ\cdot\cos 236^\circ}{\cos 28^\circ\cdot\cos 88^\circ + \cos 178^\circ\cdot\sin 208^\circ}$.