Экзаменационные вопросы по "Геометрии и алгебре" (алгебра)
ПМ-09. 1 курс, 1 семестр. *http://yktmath.narod.ru*

вопросы на хорошо: 4, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 25. тройку: 1, 2, 5, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 25.

1. Линейное уравнение. Система линейных уравнений (с.л.у.). Решение с.л.у. Совместные и несовместные с.л.у. Краткая запись. Эквивалентные с.л.у. *Элементарные преобразования с.л.у.*

2. *Элементарные преобразования с.л.у.* Прямой ход метода Гаусса.

3. *Элементарные преобразования с.л.у.* Обратный ход метода Гаусса.

4. Ступенчатый вид с.л.у. *Докажите, что любую с.л.у. можно привести к ступенчатому виду.* Свободные переменные.

5. Линейное уравнение $ax = b$ с одним неизвестными. *Критерий существования единственного решения. Теорема о вырожденном случае.*

6. С.л.у. с двумя неизвестными и двумя уравнениями. Геометрическая интерпретация. *Критерий существования единственного решения (с помощью понятия параллельности).*

7. Определитель матрицы 2×2. *Критерий существования единственного решения.*

8. Подстановка. *Число подстановок n-ой степени.* Инверсия. Четность подстановки σ и ее знак $\operatorname{sgn} \sigma$. Лемма о знаке произведения подстановок.

9. Определитель квадратной матрицы размерности $n \times n$. *Определитель матрицы 3×3.*

10. Свойство определителя: *при транспонировании определитель матрицы не меняется. Матрица с нулевой строчкой имеет нулевой определитель.*

11. Свойство определителя: *при перестановке местами строк матрицы A определитель* $\det A$ *меняет знак.*

12. Свойства определителя: *матрица A содержащая хотя бы две одинаковые строки имеет нулевой определитель. при умножении строки матрицы A на $\lambda \neq 0$, определитель* $\det A$ *увеличится λ раз. Матрица с пропорциональными строками имеет нулевой определитель.*

13. Свойства определителя: *Пусть $A_i(v)$ — матрица, где с i-ая строка заполнена набором чисел v.* Тогда $\det A_i(v) + \det A_i(w) = \det A_i(v + w)$.

14. Свойства определителя: *Если одна из строк матрицы A есть линейная комбинация других строк, то определитель* $\det A = 0$. *Определитель не меняется, если к любой строке прибавить другую строку, умножив на произвольное число.*

15. Свойства определителя: *Если одна из строк матрицы A есть линейная комбинация других строк, то определитель* $\det A = 0$. *Определитель не меняется, если к любой строке прибавить другую строку, умножив на произвольное число.*

16. Подматрица. Минор. Алгебраическое дополнение элемента матрицы. *Теорема Лапласа.*

17. *Теорема Крамера. Определитель Вандермонда.*

18. *Критерий существования и единственности решения с.л.у., где число неизвестных равно числу уравнений.*

19. Умножение матриц. Ассоциативному умножения матриц. Единичная матрица. Определение обратной матрицы. *«Простой» метод нахождения обратной матрицы $A_{2\times2}$. «Универсальный» метод нахождения обратной матрицы $A_{n\times n}$* с помощью миноров.

20. *Метод нахождения $A_{n\times n}^{-1}$* с помощью «параллельного решения n с.л.у.».

21. *Теорема об единственности обратной матрицы.*

22. Теорема о $\det AB = \det A \det B$. *Следствие об отсутствии обратных к вырожденным матрицам. Следствие об определителе обратной матрицы.*

23. *Теорема о существовании обратной матрицы для невырожденных.* Сложение матриц и умножение матриц на число.

24. Три определения ранга матрицы. *Теорема о равенстве рангов матрицы.* Метод окаймления миноров. Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

25. *Теорема Кронекера-Капелли о совместимости системы линейных уравнений.*

Утверждения набранные *курсивом* необходимо доказывать. ЗАЧЕТ по алгебре = все индивидуальные задания + положительная оценка (3,4,5) на зачете. Оценка ОТЛИЧНО на экзамене по алгебре = задача решена + теоретический вопрос ответил на отлично + дополнительные вопросы. Оценка ХОРОШО на экзамене по алгебре = задача решена + теоретический вопрос ответил + дополнительные на "хорошо" или задача. Оценка УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО на экзамене по алгебре = задача решена + дополнительные вопросы на "тройку".

1 Системы линейных уравнений

1.1 Что такое с.л.у.?

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — некоторые действительные числа; x_1, x_2, $\ldots$, x_n — некоторые символы. Тогда для каждого натурального n выражение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

называется линейным уравнением. Символы x_1, x_2, $\ldots$, x_n мы будем называть переменными или неизвестными.

Рассмотрим m линейных уравнений, которые нужно решить одновременно:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. . \tag{1}$$

Определение 1 *Выражение (1) называется системой m линейных уравнений с n неизвестными. Набор из n чисел $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ называется решением с.л.у., если при подстановке этого набора в с.л.у. вместо неизвестных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ все равенства станут верными. Множество всех решений с.л.у. называется множеством решений с.л.у. Если с.л.у. имеет хотя бы одно решение, то с.л.у. называется совместной, иначе с.л.у. называется несовместной. Множество решений несовместной с.л.у. называется пустым.*

Совместная система называется определенной, если множество решений с.л.у. имеет единственное решение, и неопределенной, если множество решений с.л.у. имеет бесконечно много решений.

Если множества решений систем линейных уравнений совпадают, то эти с.л.у. называются эквивалентными.

Далее вместо (1) будем писать следующее выражение для краткости.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right). \tag{2}$$

Можно сказать, что весь семестр мы будем исследовать с.л.у. Вопросы, которые нас интересуют: *как находить решения с.л.у.?* и *когда с.л.у. разрешима?*.

Чтобы ответить на этот вопрос мы введем понятия матрицы, определителя матрицы, векторного пространства, векторного подпространства, линейной зависимости, размерности, фундаментальной системы решений и т.д.

Для решения с.л.у. часто используют *методы исключения неизвестных* или *метод Гаусса.* В этих методах шаг за шагом выражают неизвестную через другие и исключают из системы уравнений.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Является ли несовместная с.л.у. эквивалентной уравнению $x_1^2 = -1$?

2. Как измениться (2), если второе уравнение умножить на 2?

3. Как измениться (2), если первое и второе уравнения поменять местами?

4. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 12 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{array} \right). \tag{3}$$

1.2 Как решать с.л.у.? — метод Гаусса

1.2.1 Элементарные преобразования

Ознакомимся с тремя элементарными преобразованиями с.л.у., с помощью которых мы сможем упростить любую с.л.у. до очевидного вида.

Лемма 1 (1-е элементарное преобразование) *При перестановке местами уравнений с.л.у. останется эквивалентной прежней.*

◀ Пусть A — множество решений старой с.л.у., B — новой с.л.у. Ясно, что $A \subseteq B$ и также очевидно $A \supseteq B$. Тогда $A = B$ ▶

Аналогичное доказательство имеет следующая лемма

Лемма 2 (2-е элементарное преобразование) *При умножении уравнения на ненулевое число с.л.у. останется эквивалентной прежней.*

Более содержательным является последняя лемма об элементарных преобразованиях

Лемма 3 (3-е элементарное преобразование) *Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ следующие с.л.у. эквивалентны*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+\lambda a_{l1} & a_{k2}+\lambda a_{l2} & \dots & a_{kn}+\lambda a_{ln} & b_k+\lambda b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} & b_l \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{4}$$

◀ Пусть A — множество решений первой с.л.у., B — второй с.л.у.

Рассмотрим произвольную $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$. При подстановке этого набора чисел во вторую с.л.у. для всех строках, кроме k-й, равенства очевидно верны. Рассмотрим левую часть k-го равенства. После перегруппировки слагаемых это выражение равно $(a_{k1}x_1^0 + a_{k2}x_2^0 + \ldots + a_{kn}x_n^0) + \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна b_k, вторая b_l. Следовательно, все это выражение равно $b_k + \lambda b_l$. Таким образом, k-ое выражение второй с.л.у. является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in B$. Это означает, что $A \subseteq B$.

Рассмотрим произвольную $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in B$. При подстановке этого набора чисел в первую с.л.у. равенство k-й пока не очевидно. Рассмотрим левую часть этого равенства. После перегруппировки слагаемых рассматриваемое выражение равно $\left[(a_{k1}+\lambda a_{l1})x_1^0 + (a_{k2}+\lambda a_{l2})x_2^0 + \ldots + (a_{kn}+\lambda a_{ln})x_n^0\right] - \lambda(a_{l1}x_1^0 + a_{l2}x_2^0 + \ldots + a_{l1}x_n^0)$. Первая скобка равна $b_k + \lambda b_l$, вторая b_l. Следовательно, все это выражение равно b_k. Таким образом, k-ое выражение первой с.л.у. является верным равенством. Тогда $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in A$. Это означает, что $B \subseteq A$.

Итого, из $A \subseteq B$ и $A \supseteq B$ следует $A = B$ — эквивалентность этих с.л.у. ▶

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right). \tag{5}$$

2. Можно ли элем. преобр-ми избавится от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме одной?

3. Можно ли элементарными преобразованиями несовместной с.л.у. получить совместную?

4. Можно ли применять элементарные преобразования к столбцам с.л.у.?

1.2.2 Описание метода Гаусса решения систем уравнений

Рассмотрим с.л.у. из m уравнений и n переменных.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{6}$$

1) Прямой ход метода Гаусса.

а) Среди коэффициентов первого столбца имеется ненулевой, иначе переменная x_1 отсутствует в с.л.у. и x_1 может принимать любое значение. Такие переменные называются *свободными переменными.*

б) Выберем среди коэффициентов первого столбца ненулевой a_{k1} и назовем *ведущим.*

в) Поменяем 1-ю и k-ю строки местами. Выпишем полученную с.л.у.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right). \tag{7}$$

г) Из каждой i-ой строки ниже ведущего элемента вычтем 1-ю строку, умножив на a'_{i1}/a'_{11}.

Таким образом, мы избавимся от неизвестной x_1 во всех уравнениях кроме первого уравнения. Далее решаем систему линейных уравнений без первого уравнения и столбца.

Продолжая прямой ход Гаусса, в конце получим с.л.у. *ступенчатого вида.*

$$1^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) \end{array}, \quad 2^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \end{array}, \quad 3^\circ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

В случае 1° свободная переменная — x_4; в 2° свободная переменная — x_3; в 3° свободные переменные — x_3 и x_4.

2) Обратный ход метода Гаусса.

Если одно из уравнений имеет вид $(0\ 0\ 0\ \dots\ 0 \mid c\ )$, где $c \neq 0$, то это уравнение $0 = c$ не имеет решения. Тогда не имеет решение и с.л.у. Иначе с.л.у. совместна и множество ее решений найдем после обратного хода Гаусса.

Пусть имеется k нетривиальных уравнений в ступенчатом виде с.л.у. Пусть переменные, не являющиеся свободными, имеют индексы $i_1, i_2, \dots, i_k$.

а) Из самого нижнего уравнения мы выразим x_{i_k} через b_{i_k} и свободные переменные.

Теперь при рассмотрении $(k-1)$-го уравнения x_{i_k} можно заменить через число и свободные переменные.

Продолжая это действие, мы выразим все переменные $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ через свободные переменные и некоторые числа.

При любых значениях свободных переменных мы будем получать новое решение с.л.у.

С.л.у. имеет единственное решение, если она совместна и не имеет свободных переменных.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 5 & -17 \\ 7 & 3 & -8 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2009 & 2010 & 1 \\ 2008 & 2011 & 3 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 26 & 39 \\ 13 & 26 & 39 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 21 & 31 & 23 \\ 12 & 13 & 32 \end{array}\right). \tag{8}$$

2. Решите системы линейных уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 3 & 15 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 & 16 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 29 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 22 \end{array}\right).$$

1.3 Когда с.л.у. имеет единственное решение?

1.3.1 Определитель матрицы 1×1

Приведем очевидные утверждения.

Теорема 1 (Критерий существования единственного решения) *Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственное решение.*

Теорема 2 (Вырожденный случай) *Если $a = 0$, то уравнение $ax = b$, либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.*

1.3.2 Определитель матрицы 2×2

Рассмотрим систему линейных уравнений из двух уравнений с двумя неизвестными.

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{9}$$

Считаем, что каждое из уравнений имеет хотя бы одну переменную, т.е. хотя бы один из коэффициентов a_{11} и a_{12} не равен нулю, и хотя бы один из коэффициентов a_{21} и a_{22} не равен нулю. Тогда каждое из уравнений задает прямую на плоскости с координатами x и y.

Рассмотрим случай $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x + \dfrac{b_1}{a_{12}}; \\ y = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x + \dfrac{b_2}{a_{22}}. \end{cases} \tag{10}$$

Если угловые коэффициенты $-\dfrac{a_{11}}{a_{12}} \neq -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}$, то данные прямые не являются параллельными. Не параллельные прямые имеют единственное пересечение [1].

Параллельные прямые либо не имеют точки пересечения, либо совпадают и тогда с.л.у. имеет бесконечно много решений.

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ называется определителем системы (9). Поскольку определитель зависит только от коэффициентов левой части с.л.у., то всегда пишут так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Из всех рассуждений мы делаем следующий вывод.

Теорема 3 (Критерий существования единственного решения) *Если определитель системы линейных уравнений из 2 уравнений с 2 неизвестными не равен нулю, то эта система имеет единственное решение.*

Иначе система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений.

◀ Таким образом, при $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$ критерием существования единственного решения является условие $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Другие возможные случаи: $a_{12} = 0$ и $a_{22} = 0$; $a_{12} \neq 0$ и $a_{22} = 0$; $a_{12} = 0$ и $a_{22} \neq 0$.

В первом случае мы имеем прямые параллельные оси ординат и определитель равен нулю.

Во втором случае вторая прямая параллельна оси ординат, первая — нет. Тогда определитель не равен нулю и прямые не параллельны.

В третьем случае первая прямая параллельна оси ординат, вторая — нет. Тогда определитель не равен нулю и прямые не параллельны.

Таким образом, во всех случаях с.л.у. (9) имеет единственное решение только в случае $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ▶

1.4 Определитель матрицы $n \times n$

Для определения понятия определителя матриц $n{\times}n$ нам понадобится каждой строке поставить в соответствие столбец.

Определение 2 *Выпишем в таблицу номера строк и ниже номера столбцов:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

где $\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \{1, 2, \dots n\}$. *Такие таблицы называются подстановками из* n *элементов. Далее будем считать, что* $\sigma 1 = t_1$, $\sigma 2 = t_2$, $\dots$, $\sigma n = t_n$.

Заметим, что номера столбцов (числа второй строки подстановки) не повторяются.

Пример подстановки: $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ — не подстановка.

Из определения следует, что $\mu 1 = 3$, $\mu 2 = 1$, $\mu 3 = 2$ и $\mu 4 = 4$.

Множество всех подстановок из n элементов обозначается через S_n.

Лемма 4 *Число всех подстановок степени* n *равно* $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$

◀ Построим произвольную подстановку n-ой степени. Выберем произвольный t_1. Это можно сделать n различными способами. Затем выберем t_2 из множества $\{1, 2, .., n\}$ без t_n. Этот выбор можно сделать $n-1$ способом. Продолжим процесс выбора элементов. При выборе последнего элемента t_n останется единственный вариант. Таким образом, число вариантов выбора подстановки равно $n \cdot (n-1) \cdot .. \cdot 2 \cdot 1$ ▶

Рассмотрим произвольную подстановку (3) из n элементов. Говорят, что числа t_k и t_m составляют *инверсию,* если $t_k < t_m$ и t_k стоит правее t_m. *Четностью подстановки* σ называют четность числа инверсий в нем.

Определим функцию знака подстановки

$$\operatorname{sgn} \sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma \text{ четная,} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Определение 3 *Произведением подстановок*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

назовем следующую подстановку

$$\sigma\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ s_{t_1} & s_{t_2} & \dots & s_{t_n} \end{pmatrix}.$$

Лемма 5 *Для любых подстановок* σ *и* ρ *верно равенство*

$$sgn\, \sigma\rho = sgn\, \sigma\, sgn\, \rho.$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Определите четность подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

2. Найдите $\sigma 3$, $\rho 5$, $\mu 4$. **3.** Найдите произведения подстановок $\sigma\rho$ и $\mu\sigma$.

4. Найдите обратные подстановки σ^{-1}, ρ^{-1} и μ^{-1}.

5. Существует ли подстановка из четырех элементов без инверсий? Существует ли подстановка из пяти элементов с 10 инверсиями?

1.4.1 Первое определение

Определение 4 *Определителем матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется выражение

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn\sigma \, a_{1\sigma 1} a_{2\sigma 2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma n},$$

где суммирование ведется по всевозможным подстановкам $\sigma \in S_n$.

Случай $n = 2.$ Число подстановок равно по лемме 4 равно $2! = 2$. Выпишем все эти подстановки со знаками.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Случай $n = 3.$ Число подстановок S_3 равно 6. Выпишем все эти подстановки со знаками

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{+1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{+1},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{-1}.$$

Тогда $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

1.4.2 Второе определение

Определение 5 *Определителем квадратной матрицы A размером $n \times n$ называется сумма всевозможных правильных произведений, где правильным произведением называется произведение n элементов матрицы на разных строках и столбцах и знака подстановки индексов* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{pmatrix}$.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите определители матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 10 \\ 1 & \dots & 1 & 100 & 1 \\ 1 & \dots & 1000 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10^n & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{pmatrix}$$

1.4.3 Свойства определителей

Транспонированной матрицей матрицы a_{ij} называют матрицу a_{ji}. Обозначается как A^T. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Свойство 1 *Для любой квадратной матрицы A выполнено*

$$\det A = \det A^T.$$

◀ Справедливы равенства

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{1\sigma 1} \dots a_{n\sigma n} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ a_{\sigma^{-1}1 1} \dots a_{\sigma^{-1}n n} = \det A^T.$$

Суммы равны, поскольку слагаемые равны (по лемме 5 верно $\operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \sigma^{-1} = 1$) ▶

Свойство 2 *Если строка матрицы A состоит из нулей, то* $\det A = 0$.

Свойство 3 *При перестановке местами двух строк матрицы определитель меняет знак.*

◀ Пусть $\tau = (rs)$ транспозиция, меняющая местами элементы r и s. Понятно, что $\tau^{-1} S_n = \{\tau^{-1}\sigma | \sigma \in S_n\} = S_n$.

$$\det(b_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{11\sigma} .. a_{rr\sigma} .. a_{ss\sigma} .. a_{nn\sigma}$$

$$= \sum_{\tau\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \tau\sigma a_{11\tau\sigma} .. a_{rr\tau\sigma} .. a_{ss\tau\sigma} .. a_{nn\tau\sigma} = \sum_{\sigma \in \tau^{-1} S_n} -\operatorname{sgn} \sigma a_{11\sigma} .. a_{nn\sigma} = \det(a_{ij}).$$

Последнее равенство выполнено в силу выбора τ. ▶

Свойство 4 *Если матрица A содержит одинаковые строки, что* $\det A = 0$.

Свойство 5 *Если строку матрица A умножить на λ, то* $\det A$ *возрастет в λ раз.*

Свойство 6 *Если матрица A содержит пропорциональные строки, что* $\det A = 0$.

Свойство 7 *Пусть $A_i(v)$ — матрица, где с i-ая строка заполнена набором чисел v.*
Тогда $\det A_i(v) + \det A_i(w) = \det A_i(v + w)$.

◀ $\det(c_{ij}) =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .. c_{ss\sigma} .. c_{nn\sigma} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... (a_{ss\sigma} + b_{ss\sigma}) .. c_{nn\tau\sigma} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... a_{ss\sigma} .. \sigma c_{nn\sigma} + \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \ c_{11\sigma} .... b_{ss\sigma} .. c_{nn\sigma} =$$

$$\det(a_{ij}) + \det(b_{ij}). \ ▶$$

Свойство 8 *Если одна из строк матрицы A является линейной комбинацией, то* $\det A = 0$.

Свойство 9 *Если строке матрицы A прибавить линейную комбинацию других строк, то определитель не изменится.*

Свойство 10

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdot .. \cdot \lambda_n.$$

Замечание. Из первого свойства следует, что все эти утверждения справедливы и для столбцов.

Матрицу с нулевым определителем называют вырожденной.

Определение 6 *Выберем в матрице A по k произвольных строк и столбцов. Из элементов стоящих на пересечении этих строк и столбцов можно составить новую матрицу, которую называют подматрицей A. Определитель подматрицы A называется минором.*

Выбросим из матрицы A строку с номером i и столбцом j. Определитель полученной подматрицы называется минором элемента a_{ij}. Обозначается через M_{ij}. Выражение $(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ назывется алгебраическим дополнением. Обозначается через A_{ij}.

Лемма 6 *Если матрица содержит строку, состоящую из единственного ненулевого элемента a_{ij}, то определитель этой матрицы равен произведению этого элемента и ее алгебраического дополнения. Другими словами, справедливо равенство*

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{ij}A_{ij}. \tag{12}$$

◀ Последовательно меняем i-ую строку со всеми последующими строками и j-ый столбец со всеми последующими столбцами. По свойству 3 знак определителя изменится $n-i+n-j = 2n-(i+j)$ раз. Четность числа $2n-(i+j)$ совпадает с четностью $i+j$.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j}a_{ij}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Вынесем a_{ij} за пределы определителя по свойству 5.

Покажем, что полученная матрица имеет определитель равный M_{ij}. Введем преообозначение

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nj} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n-1} & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n-1,1} & \dots & a'_{n-1,n-1} & a'_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ — подстановка индексов произвольного ненулевого правильного произведения матрицы (14). Выпишем это произведение

$$\operatorname{sgn}\sigma a'_{1\sigma1}\cdot a'_{2\sigma2}\cdot\ldots\cdot a'_{n-1\sigma n-1}\cdot 1. \tag{15}$$

Ясно, что $\sigma n = n$.

Пусть $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \end{pmatrix}$. Тогда число инверсий μ и σ совпадают. Следовательно, $\operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\mu$.

Теперь ясно, что слагаемое минора $\operatorname{sgn}\mu a'_{1\mu1}\cdot a'_{2\mu2}\cdot\ldots\cdot a'_{n-1\mu n-1}$ совпадает с (15).

Таким образом, (13) равен $a_{ij}A_{ij}$ ▶

Теорема 4 (Лапласа) *Определитель матрицы можно разложить по строке следующим образом:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \text{ для любой строки } i,$$

или разложить по столбцу:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \text{ для любого столбца } j.$$

◀ По свойству 7 справедливо разложение:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По лемме 6 каждое k-ое слагаемое в полученной сумме равно $a_{ik}A_{ik}$. ▶

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите определители матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & -1+n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & \dots & n^2 \\ 1 & 2 & 9 & \dots & n^2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin 2 & \sin 3 & \dots & \sin n \\ 1 & 2 & \sin 3 & \dots & \sin n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \sin n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{pmatrix}.$$

3. Найдите определители матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & \dots & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 2 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

4. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 27 & \dots & 3^n \\ 3 & 3 & 27 & \dots & 3^n \\ 3 & 9 & 9 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 9 & 27 & \dots & 3^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 20 & \dots & 20 & 20 & 20 \\ 0 & \dots & 0 & x & -x \\ 0 & \dots & x & -x & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 1 & \dots & 6 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & \dots & 2^n \\ 2 & 2 & 8 & \dots & 2^n \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 4 & 8 & \dots & 2^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 5 & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 4 & \dots & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & \dots & 5 & 5 & 10 \\ 5 & \dots & 5 & 10 & 5 \\ 5 & \dots & 10 & 5 & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 10 & \dots & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1.5 Примеры вычисления определителей матриц $n \times n$

1.5.1 Приведение к треугольному виду

Лемма 7 *При попарной перестановке строк матрицы* A *знак определителя изменится на* $(-1)^{[\frac{n}{2}]}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{[\frac{n}{2}]} \det \begin{pmatrix} a_{1n} & \dots & a_{12} & a_{1n} \\ a_{2n} & \dots & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nn} & \dots & a_{n2} & a_{n1} \end{pmatrix}$$

◀ При четном n достаточно $\frac{n}{2} = [\frac{n}{2}]$ перестановок, при нечетном n — $\frac{n-1}{2} = [\frac{n-2}{2}]$ ▶

1.5.2 Рекуррентные соотношения

Лемма 8 *Пусть*

$$I_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \quad I'_{n-1} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда определитель I_n *удовлетворяет рекуррентному соотношению* $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$ *и начальному условию* $I_1 = 2$ *и* $I_2 = 1$.

◀ Разложим I_n по первой строке по Лапласу: $I_n = 2I_{n-1} - 3I'_{n-1}$. В свою очередь I'_{n-1} разложим по первому столбцу: $I'_{n-1} = I_{n-2}$. Тогда $I_n = 2I_{n-1} - 3I_{n-2}$. Равенства $I_1 = 2$ и $I_2 = 1$ легко проверяются прямыми вычислениями. ▶

1.5.3 Определитель Вандермонда

Лемма 9 *Верно равенство*

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) = D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

◀ Вычтем первую строку из каждой k-й строки ниже, умножим на x_1^{k-1}. В результате обнулим первый столбец ниже элемента 1. В результате разложения определителя по первому столбцу достаточно найти определитель

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} - x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_2 + x_1 & \dots & x_n + x_1 \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{k-2}(x_2, x_1) & \dots & Q_{k-2}(x_n, x_1) \end{pmatrix}.$$

Напомним, что $a^k - b^k = (a-b)Q_{k-1}(a,b)$, где $Q_{k-1}(a,b) = a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1}$.

Из равенства $Q_{k-1}(a,b) - bQ_{k-2}(a,b) = a^{k-1}$ следует, что вычитая из каждой строчки

▶

1.6 Матрица и операции над матрицами

Матрица над полем вещественных чисел размерности $m \times n$ — таблица составленная из m строк и n столбцов заполненная вещественными числами.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Обозначается через $(a_{ij})_{m\times n}$.

Если элементы матрицы (16) совпадают с коэффициентами с.л.у. (6), то матрицу (16) называют *матрицей с.л.у.* (6). Следующую матрицу называют *расширенной матрицей с.л.у.* (6)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & \dots & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{17}$$

Матрицы одинаковой размерности можно *суммировать*:

$$(a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

Любую матрицу можно *умножить на число*: $\lambda(a_{ij})_{m\times n} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}$.

Умножение определено для матриц $(a_{ij})_{m\times n}$ и $(b_{ij})_{r\times s}$, если число столбцов n первого сомножителя равно числу строк r второго сомножителя:

$$(c_{ij})_{m\times s} = (a_{ij})_{m\times n} \cdot (b_{ij})_{n\times s}, \text{ где } c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}. \tag{18}$$

Следующие свойства суммирования матриц следуют из свойств вещественных чисел:

1) Для любых $(n \times m)$-матриц A, B, C справедливо $A + (B + C) = (A + B) + C$.

2) Для любых $(n \times m)$-матриц A, B $A + B = B + A$.

3) Для любой A матриц $n \times m$ $A + B = B + A$.

Свойства произведения матриц:

1) Для матриц A, B, C подходящих размеров $A(BC) = (AB)C$.

2) Существуют матрицы A, B такие, что $AB \neq BA$.

Свойства дистрибутивности матриц: 1) Для матриц A, B, C подходящих размеров

$$A(B + C) = AB + AC.$$

1.6.1 Матрицы специального вида

Матрица называется *квадратной,* если число ее строк равно числу столбцов.

Диагональю квадратной матрицы $(a_{ij})_{n\times n}$ называются элементы матрицы a_{ii}, $i = \overline{1, n}$.

Диагональной матрицей называется матрица с нулевыми элементами вне диагонали. Обозначается как

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где $a_{ii} = \lambda_i$, $i = \overline{1, n}$.

Матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной.* Легко проверить,что произведение любой квадратной матрицы A на единичную матрицу соответствующей размерности равно самой матрице $A = AE = EA$. Элементы единичной матрицы обозначают, как

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Теорема 5 *Для любых квадратных матриц справедливо равенство*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

1.6.2 Матричная запись с.л.у.

Теперь любую систему л.у. вида (1) можно представить в виде равенства матрицы b с произведением матриц A и b.

$$Ax = b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Проверьте правильность сказанного выше утверждения.

2. Во сколько раз меньше символов требуется, чтобы записать уравнение в матричном виде?

3. Что такое "деление матрицы на матрицу"?

1.6.3 Обратные матрицы

Определение 7 *Матрица B такая, что $AB = BA = E$ называется обратной матрицей матрицы A. Обозначается через A^{-1}.*

Невырожденным называется квадратная матрица с ненулевым определителем.

Теорема 6 *Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n}$ невырожденная квадратная матрица.*

Тогда матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\det A} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\det A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix}$$

является обратной матрицы A.

◀ Пусть $(c_{ij})_{n\times n} = (a_{ij})_{n\times n} \times (\frac{A_{ji}}{\det A})_{n\times n}$. Докажем, что $c_{ij} = \delta_{ij}$.

Рассмотрим $c_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$. По теореме Лапласа сумма $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$ является разложением определителя матрицы с двумя совпадающими строками, если $i \neq j$; и матрицы A, если $i = j$ ▶

Мы показали, что каждая невырожденная матрица имеет обратную матрицу. Из теоремы 5 следует, что вырожденные матрицы не имеют обратных.

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Покажите, что вырожденные матрицы не имеют обратных.

2. Покажите, что $A^{-1}b$ является решением уравнения $Ax = b$.

3. Напишите с.л.у.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -4 \\ 13 & 6 & -4 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & -3 \end{array}\right)$$

в виде матричных уравнений. Решите с помощью нахождения обратной матрицы.

4. Приведите пример уравнения $Ax = b$, которое не имеет решения bA^{-1}.

1.7 Формула Крамера

Теорема 7 (Крамер) *Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ & .. & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$$

с невырожденной квадратной матрицей A. Пусть A_i получена из A заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Тогда система $Ax = b$ имеет единственной решение:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\det A_1}{\det A}, \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, \frac{\det A_n}{\det A} \right).$$

◀ Докажем справедливость формулы Крамера. Матрица $A^{-1}b$ размерности $n \times 1$ является решением с.л.у. Используя предыдущую теорему, получим решение

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ji}}{\det A} b_i, \text{ для } j = \overline{1, n}.$$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} A_{ji} b_i$ является разложением определителя матрицы A_j по j-му столбцу — столбцу свободных членов.

Докажем единственность решения. Пусть сущестует еще одно решение x'. Тогда

$$x' = A^{-1}Ax' = A^{-1}b = x \quad ▶$$

Экзаменационные вопросы по "Геометрии и алгебре" (алгебра)
ПМ-09. 1 курс, 2 семестр. *http://yktmath.narod.ru*

1. Определение комплексных чисел и операций над ними. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: аргумент комплексного числа, модуль комплексного числа, существование тригонометрической формы, сложение и умножение комплексных чисел.

2. Вычисление аргумента комплексного числа. Формула вычисления степени комплексных чисел и формула Муавра. Корни многочлена $z^n = 1$.

3. Многочлен. Степень многочлена. Приведенный многочлен. Свободный и старший члены многочлена. Произведение многочленов. Леммы о степени многочлена.

4. Деление с остатком многочленов. Неполное частное и остаток. Теорема о существовании неполного частного при делении многочленов (деление уголком).

5. Наибольший общий делитель многочленов. Лемма о равенстве НОД. Алгоритм Евклида.

6. Корень многочлена. Основная теоремы алгебры.

7. Теорема Безу. Кратность корня. Следствия основной теоремы.

8. Теорема Виета. Теорема о целых корнях. Теорема о рациональных корнях.

9. Рациональные дроби. Теорема о разложении рациональной дроби.

10. Векторное пространство. Примеры.

11. Система векторов. Линейная комбинация векторов. Тривиальная и нетривиальная линейная комбинация. Линейная независимость и зависимость системы векторов. Критерий линейной зависимости векторов. Алгоритм выяснения линейной зависимости векторов.

12. Базис векторного пространства. Размерность векторного пространства. Координаты вектора. Существование и единственность координат вектора.

13. Теорема о матрице перехода от базиса к базису.

14. Линейная оболочка векторов. Лемма о том, что любая линейная оболочка векторов является векторным подпространством.

15. Биекция. Сохранение операций. Изоморфизм векторных пространств. Теорема об изоморфизме любого конечномерного векторного пространства некоторому пространству $\mathbb{R}^n$.

16. Векторное подпространство. Критерий подпространства. Примеры подпространств различных векторных пространств.

17. Однородная и неоднородная системы линейных уравнений. Теорема о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений является линейным подпространством. Фундаментальная система решений. Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений.

18. Линейное многообразие с вектором сдвига и направляющим пространством. Теорема о том, что множество решений неоднородной системы линейных уравнений является линейным многообразием.

19. Операции над векторными подпространствами: суммирование, пересечение и ортогональное дополнение. Теорема об ортогональном дополнении и решениях однородной системы линейных уравнений.

20. Прямая сумма подпространств. Теорема о размерности суммы векторных подпространств. Лемма о дополнении базиса векторного подпространства до базиса всего пространства.

21. Теорема о выражении пересечения подпространств через ортогональное дополнение.

22. Операции над системами векторов, не влияющие на линейную зависимость.

23. Скалярное произведение. Евклидово пространство. Длина (норма) вектора, угол между векторами, проекция вектора на вектор. Теорема о выражении проекции вектора на вектор через скалярное произведение.

24. Ортонормированный базис. Алгоритм ортогонализации Грамма-Шмидта. Нормирование вектора. Разложение матрицы на произведение ортогональной и треугольной матрицы.

25. Проекция вектора на линейную оболочку векторов. Теорема о кратчайшем расстоянии от точки до линейной оболочки векторов.

26. Линейные преобразования (операторы). Основное свойство. Следствие о задании линейного преобразования квадратной матрицы. Образ нулевого вектора.

27. Собственное число и собственный вектор линейного преобразования. Характеристический многочлен. Вычисление характеристического многочлена с помощью главных миноров.

28. Жорданова клетка. Жорданова нормальная форма матрицы. Теорема о матрице линейного преобразования с n собственными векторами.

29. Квадратичная форма. Канонический вид квадратичной формы. Нормальный вид квадратичной формы. Алгоритм приведения произвольной квадратичной формы к каноническому виду.

30. Основная теорема о квадратичных формах.

31. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий положительной определенности квадратичной формы. Главные угловые миноры. Критерий Сильвестра.

2 Комплексные числа

Чтобы определить комплексные числа введем обозначение i, обладающее свойством $i^2 = -1$. Выражения вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ будем называть компле́ксными числами. Множество всех таких чисел обозначим $\mathbb{C}$. Сложение и умножение комплексных чисел $z = a + bi$, $w = c + di$ определим следующим образом:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i, \quad z \cdot w = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Таким образом, сложение и умножение определены аналогично операциям для многочленов с учетом $i^2 = -1$. Основная причина потребности в таких числах — основная теоремы алгебры, которую докажем позже. Кроме этого, существует естественный процесс "расширения" чисел:

Натуральные числа $\mathbb{N}$, если потребовать существование противоположных элементов, расширяется с помощью -1. Получаются целые числа $\mathbb{Z}$. Натуральные числа $\mathbb{Z}$, если потребовать существование обратных элементов, расширяется с помощью чисел вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Получаются рациональные числа $\mathbb{Q}$. Натуральные числа $\mathbb{Q}$, если потребовать непрерывность, имеют расширение действительных (вещественных) чисел $\mathbb{R}$. Действительные числа $\mathbb{R}$, если потребовать существование корней для любых многочленов, имеют расширение комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Найдем противоположную и обратную комплексного числа $z = a + bi$. Ясно, что противоположным z является $-a - bi$. Действительно, $a + bi + (-a - bi) = (-a - bi) + a + bi = 0$.

Обратным z является $\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$. Действительно, $(a + bi)\dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}(a + bi) = 1$.

Таким образом,

$$(a + bi) : (c + di) = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2}.$$

Вещественной частью числа $z = a + bi$ называется число $a = \operatorname{Re} z$. Мнимой частью числа $z = a + bi$ называется число $b = \operatorname{Im} z$. Сопряженным к числу $z = a + ib$ называется число $\overline{z} = a - ib$. Модулем числа z называется вещественное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Лемма 10 *Для любых комплексных чисел z справедливы равенства*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}, \quad z^{-1} = \frac{z}{|z|^2}.$$

Доказательство леммы элементарно.

Заметим, что множество комплексных чисел содержит все вещественные числа.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Поставим в соответствие комплексному числу $a + ib$ вектор $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ на плоскости. Ясно, что данное соответствие является биекцией: для каждого комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ существует вектор $v = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$; для каждого вектора $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ существует комплексное число $z = x + iy \in \mathbb{C}$; каждому элементу $z \in \mathbb{C}$ соответствует единственный элемент $v \in \mathbb{R}^2$.

Лемма 11 *Пусть числам $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ соответствуют векторы $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$. Тогда*

$$z_1 = z_2 + z_3 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 = v_2 + v_3.$$

Лемма 12 (Существование и единственность тригонометрической формы) *Для каждого ненулевого комплексного числа $z = a + bi \in \mathbb{C}$ существуют положительное вещественное число $r \in \mathbb{R}$ и угол $\varphi \in [0; 2\pi)$ такие, что*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Кроме этого, (r, φ) является единственной такой парой.

Определение 8 *Число* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ *называется модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$. *Обозначается через* $|z|$. *Угол*

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \textit{если} \quad b \geqslant 0; \\ 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, & \textit{если} \quad b < 0, \end{cases}$$

называется аргументом числа $z = a + bi \in \mathbb{C}$. *Обозначается через* $\arg z$.

Приведем примеры нахождения тригонометрической формы комплексного числа.

Пусть $z = 8 - 6i$. Тогда $|z| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$ и $\arg z = 2\pi - \arccos 0,8$, поскольку $Imz < 0$.

Пусть $z = 7 + \sqrt{51}i$. Тогда $|z| = 10$ и $\arg z = \arccos 0,07$, поскольку $Imz \geqslant 0$.

Пусть $z = -6 - 6i$. Тогда $|z| = 6\sqrt{2}$ и $\arg z = 2\pi - \arccos(-\frac{1}{\sqrt{2}})$, поскольку $Imz < 0$. Следовательно, $\arg z = \frac{5\pi}{4}$.

Лемма 13 *Произведение произвольных комплексных чисел*

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

равно

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

т.е.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \textit{и} \quad \arg(z_1 + z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Из леммы 13 с помощью математической индукции следует утверждение.

Следствие 1 n*-ая степень комплексного числа* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *равно*

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

В других обозначениях $|z^n| = |z|^n$ *и* $\arg z^n = n\arg z$.

Из доказанных утверждений выведем важное следствие, называемое формулой Муавра.

Теорема 8 (Муавра) *Уравнение* $z^n = R(\cos\psi + i\sin\psi)$ *имеет ровно* n *корней*

$$z = \sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right), \ \textit{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Приведем еще одно применение следствия 1.

Лемма 14 *Поскольку* $(\cos\psi + i\sin\psi)^n = \cos n\psi + i\sin n\psi$.

Тогда

$$\cos n\psi = Re\,(\cos\psi + i\sin\psi)^n \ \textit{и} \ \sin n\psi = Im\,(\cos\psi + i\sin\psi)^n.$$

Из леммы 14 следует, что

$$\begin{aligned} \cos 2\psi &= \cos^2\psi - \sin^2\psi; \\ \cos 3\psi &= \cos^3\psi - 3\cos\psi\sin^2\psi; \\ \cos 4\psi &= \cos^4\psi - 6\cos^2\psi\sin^2\psi + \sin^4\psi; \end{aligned}$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Найдите i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{2010}. При каких n верно равенство $i^n = 1$?

2. Вычислите $(2 + 3i)(1 + i)$, $\quad (5 + 2i) : (7 + i)$, $\quad (4 + 3i) : (1 - 8i)$.

3. Найдите произведения $(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4})(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4})$, $\quad (\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6})$.

4. Приведите к тригонометрической форме числа $1 + i$, $\quad \sqrt{3} + i$, $\quad i$, $\quad 3 + 4i$, $\quad 7 + 5i$.

5. Приведите к тригонометрической форме числа по рисунку $1 - i$, $\quad i$, $\quad -i$, $\quad -1 + i$.

6. Найдите все комплексные корни $z^2 = 1$, $z^4 = 1$, $z^8 = 1$, $z^{12} = 1$, $z^3 = 1$. Нарисуйте корни на комплексной плоскости.

7. Найти наименьшее значение $|z - 5| + |z - 5i|$, где комплексные числа z удовлетворяют условию $z^2 - \bar{z}^2 = 16i$.

8. Пусть z — комплексное число, у которого $|z| = 1$ и $z \neq -1$. Докажите, что найдется действительное число t такое, что

$$z = \frac{1 + it}{1 - it}.$$

9. Упростите выражение:

$$\left| \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \right|,$$

где $x,\ y,\ z$ — комплексные числа и $|x| = |y| = |z| = r \neq 0$.

10. Точки числовой плоскости, соответствующие комплексным числам $c_1,\ c_2, \ldots,\ c_n$, являются вершинами выпуклого n–угольника. Докажите, что если комплексное число z_0 является корнем уравнения

$$\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \ldots + \frac{1}{z - c_n} = 0,$$

то точка, соответствующая числу z_0, лежит внутри данного многоугольника.

Многочлены

Определение 9 *Выражения вида*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

называются многочленами (полиномами). Если $a_n \neq 0$, то n — степень многочлена. Обозначается через $\deg P(x)$. Многочлен с единичным старшим членом $a_n = 1$ называется приведенным. Коэффициент a_0 называется свободным членом. Множество всех многочленом с вещественными коэффициентами обозначается через $\mathbb{R}[x]$, комплексными — $\mathbb{C}[x]$, целыми — $Z[x]$.

Замечание. Числа являются многочленами нулевой степени. $\deg(x^2 + ax + c) = 2$.

Лемма 15 *Для любых $P(x)$ и $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ справедливо неравенство*

$$\deg(P(x) + Q(x)) \leqslant \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}.$$

Замечание. Для $P = 1 - x^2$ и $Q(2 + x^2)$ нет равенства в выражении леммы 15.

Лемма 16 *Для любых $P(x)$ и $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ справедливо равенство*

$$\deg(P(x)Q(x)) = \deg P(x) + \deg Q(x).$$

Определение 10 *Если*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, Q(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l,$$

то произведением PQ называется многочлен

$$PQ = \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} x^j = \sum_{j=1}^{n+m} \sum_{k+l=j} a_k b_l x^j.$$

Если для $P, Q, R \in \mathbb{R}[x]$ справедливо $P = RQ$, то определена операция деления P на Q :

$$P : Q = R.$$

Если $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ справедливо равенство $P = RQ + r$ и $\deg r < \deg Q$, то определена операция деления P на Q с остатком

$$P : Q = R(ост.r).$$

Напомним термины: P — делимое, Q — делитель, R — неполное частное, r — остаток.

Теорема 9 (о существовании неполного частного) *Любой $P \in \mathbb{R}[x]$ можно поделить на произвольный ненулевой $Q \in \mathbb{R}[x]$ с остатком. Другими словами, для любых $P, Q \neq 0 \in \mathbb{R}[x]$ существуют R и $r \in \mathbb{R}[x]$ такие, что $P = QR + r$ и $\deg r < \deg Q$.*

◀ Опишем алгоритм деления с остатком. Затем покажем, что этот алгоритм корректен. Пусть $P_1 = P$ и $i = 1$.

1-й шаг. Если $\deg P_i < \deg Q$, то $r = P_i$.

2-й шаг. Если $\deg P_i \geqslant \deg Q$, то пусть

$$P_{i+1} = P_i - \frac{\text{ст.коэфф. } P_i}{\text{ст.коэфф. } Q} \cdot x^{\deg P_i - \deg Q} \cdot Q \tag{19}$$

Далее продолжаем следующую итерацию для $i \mapsto i + 1$.

В результате работы алгоритма мы имеем следующие равенства

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & R_1Q + P_2; \\ P_2 & = & R_2Q + P_3; \\ & & \dots \\ P_{k-1} & = & R_{k-1}Q + P_k; \\ P_k & = & r, \end{array}$$

где $\deg P_k < \deg Q$. Поскольку в результате обратных подстановок мы получим

$$P = P_1 = (R_1 + R_2 + \ldots + R_{k-1})Q + r, \quad \deg r < \deg Q,$$

то r — остаток от деления P на Q. Затем мы найдем неполное частное $R = (P - r) : Q$.

Поскольку $Q \neq 0$, то старший коэффициент Q не равен 0. Алгоритм не содержит деления на ноль. Алгоритм сделает не более $1 + \deg P$ итераций, т.е. является конечным. ▶

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 - 3 & \underline{x + 2} \\ \underline{x^3 + 2x^2} & x^2 + x - 2 \\ \quad x^2 - 3 & \\ \quad \underline{x^2 + 2x} & \\ \qquad -2x - 3 & \\ \qquad \underline{-2x - 4} & \\ \qquad\qquad 1 & \end{array}$$

Описанный в доказательстве алгоритм является хорошо известным с начальных классов школы алгоритмом деления "уголком". Приведем пример деления $x^3 + 3x^2 - 3$ на $x + 2$ с остатком. В совершенно непонятной формуле (19) записан совершенно понятный и естественный выбор элементов неполного частного: в данном случае x^2+x-2. Остаток равен 1. В данном случае произведено 4 итерации.

Наибольший общий делитель многочленов

Пусть $P \bmod Q$ — остаток от деления P на Q.

Заметим, что $P \bmod Q = P \bmod \lambda Q$ для любых ненулевых $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 17 *Если* $\deg P \geqslant \deg Q$, *то НОД*$(P, Q) =$ *НОД*$(P - \lambda x^k Q, Q)$ *для любого ненулевого числа* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и любых* $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

◀ Пусть N — множество всех общих делителей P и Q, M — множество всех общих делителей $P - \lambda x^k Q$ и Q. Мы покажем, что $N \subset M$ и $M \subset N$. Это будет означать равенство НОД $(P, Q) =$ НОД $(P - \lambda x^k Q, Q)$.

Действительно, если P и Q кратны $D \in \mathbb{R}[x]$, то $P - \lambda x^k Q$ кратен D для $k \geqslant 0$. Следовательно, $N \subseteq M$. Обратно, если $P - \lambda x^k Q$ и $Q(x)$ кратен $E \in \mathbb{R}[x]$, то $(P - \lambda x^k Q) + \lambda x^k Q$ также кратен $E(x)$. Поэтому $M \subseteq N$ ▶

Из леммы 17 следует следующая теорема

Теорема 10 (Алгоритм Евклида) *Если* $\deg P \geqslant \deg Q$, *то НОД*$(P, Q) =$ *НОД*$(P \,mod Q, Q)$.

Основная теорема алгебры

Определение 11 *Если для числа* $x_0 \in \mathbb{R}$ *справедливо* $P(x_0) = 0$, *то число* x_0 *называется корнем многочлена.*

Теорема 11 *Любой многочлен* $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P > 0$, *имеет хотя бы один комплексный корень.*

Докажем техническую лемму

Лемма 18 *Пусть* $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ *и* $A = \{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|\}$. *Тогда для любого* $k > 0$ *верно неравенство*

$$|x|^n > k|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0|$$

для всех комплексных $x \in \mathbb{C}$ *находящихся вне окружности* $|x| > Ak + 1$ *на комплексной плоскости*

Заметим, что для любых комплексных чисел $a, b \in \mathbb{C}$ справедливы равенство $|ab| = |a| \cdot |b|$ и неравенство $|a| + |b| \geqslant |a + b|$, которое называется неравенством треугольников.

Доказательство леммы 18. По неравенству треугольника

$$\begin{aligned}&|a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0| \leqslant \\ &\quad\leqslant |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x| + |a_0| \leqslant |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2| + |a_1x| + |a_0| \leqslant \\ &\quad\leqslant |a_{n-1}x^{n-1}| + \ldots + |a_2x^2| + |a_1x| + |a_0| \leqslant |a_{n-1}| \cdot |x^{n-1}| + \ldots + |a_1| \cdot |x| + |a_0| \leqslant \\ &\qquad\qquad\leqslant A(|x^{n-1}| + \ldots + |x|^2 + |x| + 1) = A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}.\end{aligned}$$

Поскольку $|x| > 1$, то верно неравенство

$$A\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} \leqslant A\frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Последнее выражение меньше $\frac{1}{k}|x|^n$ для всех $|x| > Ak + 1$. Лемма доказана.

Приведем лемму Даламбера.

Лемма 19 (Даламбер) *Для любого многочлена* $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg Q(x) > 0$ *и точки* $z \in \mathbb{C}$ *существует* $h \in \mathbb{C}$ *такое, что* $|Q(z)| \geqslant |Q(z + h)|$ *если* $Q(z) \neq 0$.

Доказательство основной теоремы алгебры.

????????????????

Теорема 12 (Безу) *Пусть* $P(x) \in \mathbb{R}[x] \cup \mathbb{C}[x]$. *Верны два утверждения:*

Если $P(c) = 0$ *для некоторого* $c \in \mathbb{C}$, *то* $P(x)$ *кратно* $(x - c)$.

Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x] \cup \mathbb{C}[x]$. *Остаток от деления* $P(x)$ *на* $(x - c)$ *равен* $P(c)$.

Доказательство теоремы Безу. Первое утверждение теоремы хорошо известно как теорема Безу. Но поскольку второе утверждение является более общим, то мы докажем его.

Остаток от деления на многочлен первой степени имеет нулевую степень, поэтому $P(x) \bmod (x - c)$ является числом. Обозначим его через a. По определению деления с остатком многочлены $P(x)$ и $(x - c)Q(x) + a$ равны. Следовательно, они равны и при $x = c$. Это означает $a = P(c)$. Теорема доказана.

Определение 12 *Если* $P(x)$ *кратно* $(x - c)^k$, *но не кратно* $(x - c)^{k+1}$, *то корень называется корнем* $P(x)$ *кратности* k.

Следствие 2 *Любой многочлен* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ *степени* $n = \deg P(x)$ *имеет ровно* n *корней с учетом кратности.*

Следствие 3 *Любой многочлен* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ *степени* $n = \deg P(x)$ *можно представить в виде произведения линейных многочленов*

$$P(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

единственным образом с точностью до перемены местами сомножителей.

Кольцо многочленов — сложение и умножение многочленов. Свойства кольца многочленов: ассоциативность, существование нуля, существование противоположного, коммутативность, ассоциативность умножения, существование единицы. дистрибутивность.

Теорема 13 (Виет) *Если* $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}(x)$ *имеет корни* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$.

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}
a_0 &= (-1)^n x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n;\\
a_1 &= (-1)^{n-1}(x_2x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + x_1x_3 \cdot \ldots \cdot x_n + \ldots + x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1});\\
&\ldots\\
a_{n-2} &= x_1x_2 - x_1x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n;\\
a_{n-1} &= -x_1 - x_2 - \ldots - x_n;
\end{aligned}$$

$\lhd$ Проверить прямым подсчетом $\rhd$

Теорема о рациональных корнях многочлена.

Теорема 14 *Если* $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}(x)$ *с целыми коэффициентами имеет рациональный корень* $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *то* a_n *кратно* q, *а* a_0 *кратно* p. ∇ *б.д.* $\triangle$

Оценка корней многочлен — теорема.

Теорема 15 (Оценка корней многочлена снизу и сверху) *Пусть* $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}(x)$. *Тогда все вещественные корни лежат на отрезке* $\left[-1 - \dfrac{A}{|a_n|}; 1 + \dfrac{A}{|a_n|}\right]$, *где* $A = \max\{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}$.

$\lhd$ Вывести, используя формулу суммирования геометрической прогрессии, из очевидного равенства $|a_nx_0^n| = |a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0 + a_0|$, где x_0 — корень $P(x)$. $\rhd$

Алгоритм Штурма определения числа вещественных корней. Оценка корней многочлена с помощью алгоритма Штурма.

Метод Ньютона

Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть неизвестную функцию $f(x)$ известно, что

$$f(x_1) = c_1, \quad f(x_2) = c_2, \quad \ldots, \quad f(x_{n+1}) = c_{n+1}.$$

Многочлен

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{(x - x_i)} \cdot \ldots \cdot (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot \widehat{(x_i - x_i)} \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{n+1})}$$

называется интерполяционным многочленом Лагранжа, интерполирующим (приближающим) функцию $f(x)$. Легко видеть, что $P(x_j) = c_j$ для всех $j = \overline{1, (n+1)}$.

Формула Виета

Определение 13 *Многочлен* $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ *называется приведенным, если* $a_n = 1$.

Теорема 16 *Пусть приведенный многочлен* $P(x)$ *имеет корни* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Тогда*

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -x_1 - x_2 - \ldots - x_n;\\
a_{n-2} &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots - x_{n-1}x_n;\\
a_{n-3} &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots - x_{n-2}x_{n-1}x_n;\\
&\ldots\\
a_0 &= x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.
\end{aligned}$$

Рациональные дроби

Определение 14 *Если $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$, то выражения вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ называется рациональной дробью.*

Простейшими рациональными дробями называются дроби вида

$$\frac{b}{x+a}, \quad \frac{b}{(x+a)^2}, \quad \frac{b}{(x+a)^3}, \quad \ldots, \quad \frac{cx+d}{x^2+ax+b}, \quad \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^2}, \quad \ldots$$

Многочлен $P(x)$ называется неприводимым, если он не представим в виде $P(x) = Q(x)R(x)$, где $\deg Q$, $\deg R \geqslant 1$.

Лемма 20 *Неприводимые многочлены в $\mathbb{C}[x]$ — линейные многочлены и числа $\{a_1x+a_0 \mid a_1, a_0 \in \mathbb{C}\}$.*

Неприводимые многочлены в $\mathbb{R}[x]$ — квадратичные трехчлены, линейные многочлены и числа $\{a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, \quad a_1^2 - 4a_0a_2 < 0\} \cup \{a_1x + a_0 \mid a_1, a_0 \in \mathbb{C}\}$.

◀ Первое утверждение следует из основной теоремы алгебры.

Докажем второе утверждение. Поскольку $\overline{a+bi}+\overline{c+di} = \overline{(a+bi)+(c+di)}$ и $(\overline{a+bi})(\overline{c+di}) = \overline{(a+bi)(c+di)}$,

$$P(\overline{z_0}) = a_n\overline{z_0}^n + a_{n-1}\overline{z_0}^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z_0} + a_0 = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0.$$

Если z_0 является корнем $P(z)$, то $\overline{z}_0$ также является корнем $P(z)$.

Рассмотрим разложение $P(z)$, $\deg P = k + s$, на произведение линейных многочленов

$$P(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_k)(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_s), \quad r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}, z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{C}.$$

Некоторые сомножители соответствуют вещественным корням, другие — комплексным. Из доказанного выше следует, что все комплексные корни разбиваются на пары сопряженных.

$$P(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_k)(z - z_1)(z - \overline{z}_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_r)(z - \overline{z}_r).$$

Произведения вида $(z-z_i)(z-\overline{z}_i)$ равны $z^2-(z_i+\overline{z}_i)z+z_i\overline{z}_i$. Поскольку $z_i+\overline{z}_i$ и $z_i\overline{z}_i$ вещественны, то такие произведения $(z - z_i)(z - \overline{z}_i) = z^2 + a_iz + b_i, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}$. ▶

Теорема 17 *Любая рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и простейших рациональных дробей.*

3 Векторные пространства

Определение 15 *Множество V с операциями сложения векторов и умножения вектора на число называется векторным (линейным) пространством, если выполнены следующие восемь аксиомы для любых $u, v, w \in V$ и чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*

1) $u + v = v + u$; *аксиома коммутативность*

2) $u + (v + w) = (u + v) + w$; *аксиома ассоциативности*

3) существует $\vec{O} \in V$ такой, что $u + \vec{O} = \vec{O} + u = u$ для любого $u \in V$;

4) для любого v существует вектор обозначаемый через $-v$ такой, что $v+(-v) = -v+v = \vec{O}$;

5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$; *аксиома дистрибутивности*

6) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$; *аксиома дистрибутивности*

7) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;

8) $1 \cdot v = v$;

Элементы векторного пространства называются векторами.

В алгебре векторы обычно не выделяются стрелкой сверху.

Примеры векторных пространств: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $C[a, b]$.

Лемма 21 *Кольца $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ являются векторными пространствами.*

Определение 16 *Системой векторов называется называется упорядоченное множество векторов. Линейной комбинацией*

Линейной комбинацией системы векторов v_1, v_2, $\dots$, v_n называется выражения вида

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Если в выражении все коэффициенты равны $0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n$, то линейная комбинация называется тривиальной.

Если вектор w равен некоторой линейной комбинации системы векторов v_1, v_2, $\dots$, v_n, то говорят "w линейно выражается через v_1, v_2, $\dots$, v_n".

Если некоторая нетривиальная линейная комбинация векторов v_1, v_2, $\dots$, v_n равна нулевому вектору, то эта система векторов называется линейно зависимой.

Система векторов называется линейно независимой, если из равенства нулю линейной комбинации векторов следует тривиальность этой линейной комбинации.

Последнее определение можно переформулировать следующим образом:

Система векторов называется линейно независимой, если линейная комбинация системы векторов равна только в тривиальном случае.

Система векторов называется линейно независимой, если все нетривиальные ее линейные комбинации системы векторов не равны нулевому вектору.

Лемма 22 *Система векторов линейно зависима если и только если хотя бы один вектор из этой системы линейно выражается через остальные.*

Определение 17 *Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ называется базисом векторного пространства V, если*

1) $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ — линейно независима;

2) каждый вектор V линейно выражается через векторы этой системы векторов.

Размерностью векторного пространства V называется количество векторов в его базисе.

Заметим, что размерность пространства не зависит от выбора базиса.

Координаты вектора

Определение 18 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ базис пространства V. Координатами вектора $w \in V$ называется набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.*

Координаты вектор всегда определяются относительно некоторого базиса. При работе с несколькими базисами мы будем писать $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_e$, что означает $v = e_1\alpha_1 + \ldots + e_n\alpha_n$.

Лемма 23 (Об единственности координат) *Каждый вектор имеет единственный набор координат.*

Лемма 24 (О матрице перехода от базиса к базису в $\mathbb{R}^3$) *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ даны два базиса*

$$\begin{array}{ll} a = (a_1, a_2, a_3), & p = (p_1, p_2, p_3), \\ b = (b_1, b_2, b_3), & q = (q_1, q_2, q_3), \\ c = (c_1, c_2, c_3), & r = (r_1, r_2, r_3). \end{array}$$

Тогда матрица перехода от координат базиса a, b, c к координатам базиса p, q, r равна

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

◀ Пусть произвольный вектор v имеет координаты $(v_1, v_2, v_3)_{abc}$ относительно базиса a, b, c и координаты $(w_1, w_2, w_3)_{pqr}$ относительно базиса p, q, r.

По определению координат $v = v_1 a + v_2 b + v_3 c$ и $v = w_1 p + w_2 q + w_3 r$.

С одной стороны выпишем координаты v в стандартном базисе

$$v = v_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 \\ v_1 a_2 \\ v_1 a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 b_1 \\ v_2 b_2 \\ v_2 b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_3 c_1 \\ v_3 c_2 \\ v_3 c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 a_1 + v_2 b_1 + v_3 c_1 \\ v_1 a_2 + v_2 b_2 + v_3 c_2 \\ v_1 a_3 + v_2 b_3 + v_3 c_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, v имеет следующие координаты в стандартном базисе

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица, составленная из координат линейно независимых векторов **имеет максимальный ранг**. Следовательно,

▶

3.1 Линейная оболочка векторов

Множество всех линейных комбинаций вида $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ "пробегают"$\mathbb{R}$, называется линейной оболочкой векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Обозначается $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$.

Иногда $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ называется векторным пространством, натянутым на векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Лемма 25 *Для любой системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейная оболочка $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ является векторным пространством.*

3.2 Изоморфизмы векторных пространств

Определение 19 *Отображение $f : V \to W$ называется биекцией, если оно*

1) взаимно однозначно ($f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$);

2) всюду определено на V (для любого $v \in V$ существует $f(v)$);

3) отображает "на" W (для любого $w \in W$ существует $v \in V$ такое, что $w = f(v)$);

Биекция $f : V \to W$ между векторными пространствами называется изоморфизмом векторных пространств, если она сохраняет оперции, т.е. для любых $v, u \in V$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$

4) $f(v +_V u) = f(v) +_W f(w)$;

5) $f(\alpha \cdot_V v) = \alpha \cdot_W f(v)$.

Здесь "$+_V$"операция сложения векторов, "$\cdot_V$"умножения вектора на число в пространстве V; "$+_W$"операция сложения векторов, "$\cdot_W$"умножения вектора на число в W.

Если существует изоморфизм между V и W, то векторные пространства V и W называются изоморфными. Обозначается через $V \cong W$.

Поскольку композиция биекций является биекцией, то $U \cong V$ и $V \cong W$, то $U \cong W$.

Теорема 18 (Об изоморфности n-мерных пространств) *Каждое векторное пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

3.3 Векторное подпространство

Определение 20 *Пусть W подмножество векторного пространства V является векторным пространством. Такие подмножества W называются векторными подпространствами V.*

Теорема 19 (Критерий подпространства) *Пусть V — произвольное векторное пространство и $W \subseteq V$ некоторое его подмножество.*

Тогда W является векторным подпространством W если и только если выполнены все следующие три условия

1) для любых $v, w \in W$ сумма $v + w \in W$;

2) для любого $w \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ произведение $\lambda w \in W$;

3) $\vec{O} \in W$.

Лемма 26 *Пусть V — векторное пространство. Подмножество $W \subset V$ является векторным подпространством V тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) для любых векторов $v, u \in W$ верно $v + w \in V$;

2) для любого вектора $v \in W$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно $\lambda v \in V$.

$\lhd$ Была доказана только половина утверждения: если два условия выполнены, то W — векторное подпространство V. Для этого достаточно проверить все аксиомы векторного пространства $\rhd$

Примеры:

$W = \langle 1, x\rangle$ подпространство $\mathbb{R}_3[x]$.

Теорема 20 *Пусть A — $m \times n$-матрица, $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Тогда множество всех решений однородной системы уравнений $Av = 0$ является векторным подпространством $\mathbb{R}^n$ размерности $n - rang\, A$.

Определение 21 *Пусть v_0 — вектор, L — линейное подпространство V.*

Множество

$$\{v_0 + w \mid w \in L\}$$

называется линейным многообразием с вектором сдвига v_0 и направляющим пространством L.

Его размерностью называется размерность $\dim L$.

Определение 22 *Фундаментальной системой решений однородной системы линейных уравнений называется базис пространства ее решений.*

Теорема 21 *Пусть v_0 — частное решение системы уравнений $Av = b$ и L — пространство решений однородной системы линейных уравнений $Av = \vec{O}$.*

Тогда множество всех решений неоднородной системы уравнений $Av = b$ является линейным многообразием (x_0, L).

3.4 Суммирование и пересечение векторных подпространств

Определение 23 *Пусть $U = \langle u_1, u_2, \ldots, u_r \rangle$ и $W = \langle w_1, w_2, \ldots, w_s \rangle$ векторные подпространства векторного пространства V.*

Пересечением подпространств U и W называется подпространство

$$U \cap W = \{u \mid u \in U, w \in W\}.$$

Суммой подпространств U и W называется подпространство

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Сумма подрпространств называется прямой, если их пересечение имеет размерность 0. Обозначается через $U \oplus W$.

Ортогональным дополнением к подространству U пространства $\mathbb{R}^n$ называется

$$U^{\perp} = \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) \mid u_1 w_1 + u_2 w_2 + \ldots + u_n w_n, \text{ для всех } (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U\}.$$

Теорема 22 *Пусть $U = \langle v_1, v_2, \ldots v_k \rangle$. Тогда $U^{\perp}$ является пространством решений однородной системы уравнений*

$$\left(\begin{array}{c|c} \longleftarrow v_1 \longrightarrow & 0 \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow & 0 \\ \ldots & \ldots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow & 0 \end{array}\right)$$

Теорема 23 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*
Тогда $U \cap W = (U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp}$.

Теорема 24 *Пусть U и W векторные подпространства векторного пространства V.*
Тогда $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$.

Лемма 27 *Пусть U векторное подпространство векторного пространства V.*
Тогда любой базис U можно дополнить до базиса V.

3.5 Определение линейной независимости векторов

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ векторы векторного пространства V. Справедливы следующие леммы, позволяющие выяснить линейную зависимость векторов за конечное число шагов.

Теорема 25 *Линейная независимость системы векторов не зависит от*

1) перестановки местами векторов системы векторов;

2) от умножения вектора системы векторов на ненулевое число;

3) от прибавления вектору системы векторов линейной комбинации других векторов системы векторов.

Это означает, что элементарными преобразованиями Гаусса векторы всегда можно привести к ступенчатому виду.

Евклидовы пространства

Определение 24 *Функция* $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ *называется скалярным произведением, если она обладет тремя свойствами для всех* u, w, v

1) $(u, v) = (v, u)$; *коммутативность*

2) $(u, u) > 0$ *кроме случая* $(\vec{O}, \vec{O}) = 0$; *положительная определенность*

3) $(u, \lambda w + \mu v) = \lambda(u, w) + \mu(u, v)$. *линейность*

Векторное пространство со скалярным произведением называется евклидовым. Длиной (нормой) вектора u называется число $\sqrt{(u, u)}$. *Углом между векторами u и w называется угол* $\alpha \in [0; \pi]$ *такой, что*

$$\cos\alpha = \frac{(u, w)}{|u||w|}.$$

Проекция вектора на вектор

Алгоритм Грамма-Шмидта

Пусть v_1, $v_2, \dots,$

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1; \\ e_2 &= v_2 - \frac{(v_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1; \\ e_3 &= v_3 - \frac{(v_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(v_3, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2; \\ &\dots \end{aligned}$$

Применяя процесс ортогонализации к столбцам матрицы можно доказать, что каждую невырожденную матрицу O можно разложить в произведение $A = OU$, где O — ортогональная матрица, а U — треугольная матрица с положительными элементами на диагонали.

Проекция вектора на линейную облочку векторов

Кратчайшее расстояние от точки до линейной облочки

Определение 25 *Расстоянием между множествами A и* $B \subset E$ *евклидова пространства называется*

$$\rho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} |AB|.$$

Теорема 26 *Пусть E — евклидово пространство.*

Расстояние от вектора v до векторного подпространства $W \subset E$ *равно*

$$\rho(v, W) = |v - \mathit{Пр}_W v|.$$

Единственным ближайшим к вектору v является вектор $\mathit{Пр}_W v$.

◀

▶

Пример задачи выяснения линейной зависимости системы векторов.

Лемма о существовании координат относительно базиса.

3.5.1 Ранги матрицы.

Ранг матрицы A — число ненулевых строк после приведения A к ступенчатому виду.

Теорема. Все ранги матрицы совпадают.

3.6 Критерий совместности с.л.у.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна если и только если ранг матрицы с.л.у. совпадает с рангом расширенной матрицы с.л.у. $\overline{A}$:

Следствие о размерности ортогонального дополнения линейной оболочки линейно независимых векторов. Следствие о сумме размерности векторного подпространства W, его ортогонального дополнения $W^\perp$ и векторного пространства V.

Следствие 4 *Для любого векторного подпространства W векторного пространства V верно равенство*

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V.$$

$\lhd$ Следует из теорем **??** и **??** $\rhd$

Следствие 5 *Если $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — линейно независимы, то*

$$\dim < v_1, v_2, \ldots, v_k >^\perp = n - k$$

$\lhd$ Следует из предыдущего следствия $\rhd$

Теорема о размерности линейной оболочки векторов и ранга матриц, составленной из координат векторов. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при умножении вектора на ненулевое число. Лемма о том, что линейная оболочка не меняется при замене v_i на $v_i + \lambda v_j$. Задача нахождения размерности линейной оболочки векторов.

Теорема 27 *Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы.*

Тогда

$$\dim < v_1, v_2, \ldots, v_k > = rang \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \ldots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow \end{pmatrix}$$

$\lhd$ Следует из теоремы **??** и следствий 4, 5 $\rhd$

Линейное преобразование векторных пространств

Определение 26 *Отображение $f : V \to V$ такое, что для любых векторов $w, v \in V$ и чисел λ, μ верно равенство $f(\lambda w + \mu v)$*

Теорема 28 (об основном свойстве линейного преобразования) *Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис векторного пространства V. Тогда для любого линейного преобразования $f : V \to V$ верно, что*

$$f(x) = f(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \ldots + x_nf(e_n).$$

$\lhd$ Следует из определения линейных преобразований $\rhd$

Следствие о том, что каждое линейное преобразование можно представить с помощью матрицы.

Следствие 6 *Сопоставим векторам $v \in \mathbb{R}^n$ с координатами $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ матрицы-столбцы $\begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix}$ размера $n \times 1$.*

Тогда для любого линейного преобразования $f : V \to V$ существует квадратная матрица A размера $n \times n$ такая, что $f(v) = Av$.

$\lhd$ Следует из теоремы 28 $\rhd$

Свойства линейных преобразований: образ нулевого вектора.

Лемма 28 *Пусть $f(v)$ — произвольное линейное преобразование векторного пространства V. Образ нулевого вектора $f(0)$ является нулевым вектором.*

$\lhd$ Следует из определения линейного преобразования $\rhd$

Свойства линейных преобразований: образ противоположного вектора.

Лемма о том, что каждая матрица задает некоторое линейное преобразование.

Лемма 29 *Пусть A — квадратная матрица $n \times n$. Тогда отображение Av является линейным преобразованием.*

$\lhd$ Проверить определение линейного преобразования $\rhd$

Собственные числа и собственные векторы линейных преобразований.

Характеристический многочлен матрицы A.

Лемма о корнях характеристического многочлена.

Лемма 30 *Комплексные корни характеристического многочлена матрицы A являются собственными числами матрицы A.*

$\lhd$ Выбрать произвольный корень λ_0. Показать, что уравнение $(A - \lambda E)v = 0$ имеет хотя бы одно ненулевое решение v. Затем показать, что $Av = \lambda v$ $\rhd$

Жорданова форма матрицы. Теорема о жордановой форме $T^{-1}AT = J$ матрицы A, если собственные числа попарно различны.

Теорема 29 *Если A — квадратная матрица $n \times n$ такая, что*

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2, \ldots, Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ составляют базис $\mathbb{R}^n$, то верно равенство

$$AT = TJ_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \ldots \\ \longleftarrow v_k \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$\lhd$ Показать справедливость теоремы прямыми вычислениями $\rhd$

Лемма о произведении собственных числах. Лемма о собственных векторах симметрической матрицы $A = A^T$.

Лемма 31 *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A размера $n \times n$.*

Тогда

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

$\lhd$ Следует из теорем 29, **??** и подсчета определителя диагональной матрицы. $\rhd$

Лемма 32 *Если $A = A^T$, т.е. матрица A является симметрической, то собственные числа матрицы A являются вещественными. ∇ б. д. $\triangle$*

Преобразования координат. Формула перевода старых координат в новые координаты. Матрица перехода.

Лемма 33 *Пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — координаты вектора v относительно нового базиса $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и*

$(w_{11}, w_{12}, \ldots, w_{1n})$ — координаты вектора w_1 относительно базиса e

$(w_{21}, w_{22}, \ldots, w_{2n})$ — координаты вектора w_2 относительно базиса e

$\ldots$

$(w_{n1}, w_{n2}, \ldots, w_{nn})$ — координаты вектора w_n относительно базиса e.

Тогда координаты $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_n)$ вектора v относительно старого базиса $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ удовлетворяют условию:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \ldots & w_{n2} \\ & & & \\ w_{1n} & w_{2n} & \ldots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \ldots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

$\lhd$ Переписать в выражении $v = v'_1 w_1 + v'_2 w_2 + \ldots + v'_n w_n$ векторы $w_1, w_2, \ldots, w_n$ через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ $\rhd$

Изменение матрицы линейного преобразования при переходе к новому базису. Переход к новому базису из собственных векторов и жорданова форма матрицы.

Лемма 34 *Пусть A — матрица линейного преобразования f относительно старого базиса W, B — матрица линейного преобразования f относительно нового базиса E и T — матрица перехода от старых координат к новым. Тогда верно равенство $B = T^{-1}AT$.*

Теорема о жордановой форме матрицы при совпадении собственных чисел.

Теорема 30 *Пусть f — линейное преобразование R^n такое, что*

$$Av_{k+1} = \lambda_{k+1} v_{k+1}, \quad Av_{k+2} = \lambda_{k+2} v_{k+2}, \quad \ldots, \quad Av_n = \lambda_n v_n$$

и собственные векторы $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ линейно независимы, остальные собственные числа совпадают $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$.

Тогда существуют собственные и присоединенные к ним векторы $v_1, v_k, \ldots, v_k$ такие, что

$$\begin{array}{llllll} v_{s_1} & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f v_2 & \mapsto^f v_1 & \mapsto^f 0; \\ v_{s_2} & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f v_{s_1+2} & \mapsto^f v_{s_1+1} & \mapsto^f 0; \\ & & \ldots & & \\ v_k & \mapsto^f \ldots & \mapsto^f v_{s_t+2} & \mapsto^f v_{s_t+1} & \mapsto^f 0; \end{array}$$

и верно равенство

$$AT = TJ, \text{ где } T = \begin{pmatrix} \longleftarrow v_1 \longrightarrow \\ \longleftarrow v_2 \longrightarrow \\ \dots \\ \longleftarrow v_n \longrightarrow \end{pmatrix}^T \text{ и } J = \begin{pmatrix} J_1 & & \dots & & \\ & J_2 & \dots & & \\ & & \ddots & & \\ & & \dots & J_{t+1} & \\ & & \dots & & J_{\lambda_{k+1},\lambda_{k+2},\dots,\lambda_n} \end{pmatrix},$$

где

$$J_1, J_2, \dots, J_{t+1} \text{ имеют вид } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

и размеры $s_1 \times s_1, (s_2 - s_1) \times (s_2 - s_1), \dots, (s_{t+1} - s_t) \times (s_{t+1} - s_t)$ *соответственно.* ∇ *б.д.* $\triangle$

Функции от матриц.

Теорема 31 *Найдите эту теорему в теореме.* ∇ *б.д.* $\triangle$

Квадратичные формы. Мономы. Представление квадратичной формы с помощью матрицы.
Лемма о формуле изменения матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.

Лемма 35 *Пусть A — матрица квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ относительно старого базиса.*

Пусть C — матрица квадратичной формы $K(x') = (x')^T Cx'$ относительно нового базиса. Пусть также $x = Bx'$. Тогда

$$C = B^T AB.$$

$\triangleleft$ Доказывается в одну строчку $\triangleright$

Теорема о приведении матрицы квадратичной формы к диагональному виду (другими словами о приведении квадратичной формы к каноническому).

Теорема 32 *Пусть $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для любой квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что в новом базисе квадратичная форма имеет канонический вид.*

Другими словами для любой квадратной матрицы A существует квадратная матрица B такая, что матрица $B^T AB$ является диагональной.

$\triangleleft$ Привести алгоритм выделения полного квадрата такое, что избавляется от переменных в выражении $\triangleright$

Нормальный вид квадратичной формы. Сокращенная запись нормальной формы квадратичной формы.

Теорема 33 *Пусть $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Для любой квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$ существует линейное преобразование пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что в новом базисе квадратичная форма имеет нормальный вид.*

Другими словами для любой квадратной матрицы A существует квадратная матрица B такая, что матрица $B^T AB$ является диагональной с элементами -1, 1, 0 по диагонали.

$\triangleleft$ Вывести из предыдущей теоремы. $\triangleright$

Теорема «Закон инерции» об единственности нормального вида квадратичной формы.

Теорема 34 (Закон инерции) *Нормальная форма квадратичной формы единственна с точностью до переобозначения.*

◁ Доказать от обратного ▷

Положительно определенная квадратичная форма. Следствие о нормальном виде положительно. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Следствие 7 *Пусть квадратичная форма K в имеет следующий нормальный виде $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2 - x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_{k+l}^2$. Форма K положительно определена тогда и только тогда, когда $l = 0$ и $k = n$.*

◁ В обе стороны очевидно ▷

Теорема 35 (Критерий Сильвестра) *Пусть A — матрица квадратичной формы $K(x) = x^T Ax$. Тогда $K(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы A положительны. ∇ б.д. $\triangle$*

Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Лексиографический порядок на мономах. Основания теорема о симметрических многочленах.

Теорема 36 (Основаная о симметрических многочленах) *Каждый симметрический многочлен $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических.*

◁ Построить алгоритм построения таких многочленов. Из лексиографического отношения порядка следует конечность этого алгоритма. ▷