1 Введение

1.1 Множества

При определении нового термина мы всегда пользуемся ранее введенными терминами. Следовательно, существует какой-то первоначальный термин, который нельзя определить. В XIX веке математики решили, что это будет понятие множества.

Понятие множества мы не определяем строго. Будем говорить, что множество определяется своими элементами. Все остальные термины и понятия математики можно определить с помощью понятия множества.

Примеры. Приведем хорошо известные множества и их обозначения

$$\begin{array}{rcl} \text{Алфавит} & = & \{\text{А, Б, В}, \ldots, \text{Я}\}; \\ \mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, \ldots\}; \\ \mathbb{Z} & = & \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}; \\ \mathbb{Q} & = & \left\{ \dfrac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}; \\ \mathbb{R} & — & \text{множество действительных чисел;} \\ p\mathbb{Z} & = & \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \,\vdots\, p \}; \\ 2\mathbb{Z} & — & \text{все чётные.} \end{array}$$

Определим множество невырожденных матриц, которое мы будем называть общей линейной группой

$$GL_n(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, \det A \neq 0 \right\}.$$

Дадим определения специальной линейной группы $SL_n(\mathbb{R})$, ортогональной линейной группы $O_n(\mathbb{R})$ и специальной ортогональной линейной группы $SO_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} SL_n(\mathbb{R}) & = & \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}; \\ O_n(\mathbb{R}) & = & \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = E\}; \\ SO_n(\mathbb{R}) & = & \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}. \end{array}$$

Упражнение и вопросы для самоконтроля.

1. Найдите все элементы $O_1(\mathbb{R})$.

2. Докажите, что

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0; 2\pi) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0; 2\pi) \right\}$$

3. Опишите $SO_2(\mathbb{R})$.

4. Верно ли равенство $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$?

5. Опишите множество всех целых чисел, которые при делении на 5 дают остаток 1.

6. При каких a и b равны множества $\{a, \{b\}\}$ и $\{3, \{4\}\}$?

7. Про множество M известно, что если (a, b), $(c, b) \in M$, то $a = c$. Можно ли ввести следующее обозначение: $b = f(a)$, если $(a, b) \in M$?

8. Про множество M известно, что если (a, b), $(a, c) \in M$, то $b = c$. Можно ли ввести следующее обозначение: $b = f(a)$, если $(a, b) \in M$?

1.2 Двухместные (бинарные) операции на множествах

Определение 1 *Двухместной (бинарной) операцией на множестве M называется любое отображение $f : M \times M \to M$.*

Примеры двухместных операций. Операции суммирования, умножения, вычитания и деления вещественных чисел.

$$+(3,5) = 3+5 = 8, \quad \times(2,4) = 2\times 4 = 8,$$

$$-(5,1) = 5-1 = 4, \quad \div(9,3) = 9 \div 3 = 3.$$

Иногда значение операции является неопределенным как в случае $1 \div 0$. Далее рассматриваются только всюду определенные операции, если не оговорено обратное.

Примеры одноместных операций. Квадратный корень вещественного числа, вычисление противоположного вектора.

$$\sqrt{9} = 3, \quad -(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3).$$

Упражнения и вопросы для самоконтроля

1. Почему нахождение длины вектора не является одноместной операцией?

2. Является ли скалярное произведение векторов двухместной операцией?

3. Почему смешанное произведение векторов не является трехместной операцией?

4. Пусть M — множество углов $[0; 2\pi)$. Придумайте двухместную операцию на M.

5. Пусть M — множество номеров $\{1, 2, \ldots, n\}$. Придумайте двухместную операцию на M.

6. Приведите пример трехместной операции.

Замечание. Далее будем рассматривать только всюду определенные операции.

1.3 Свойства двухместных операций

Определение 2 *Пусть на множестве M задана двухместная операция τ.*

1) Если для любых $a, b, c \in M$ верно равенство

$$(a\tau b)\tau c = a\tau(b\tau c),$$

то говорят, что операция τ обладает свойством ассоциативности.

2) Если существует элемент $e \in M$ такой, что для любого $a \in M$ верны равенства

$$a\tau e = e\tau a = a,$$

то говорят, что существует нейтральный элемент e в множестве M с операцией τ.

3) Если для любого $a \in M$ существует элемент $b \in M$ такой, что

$$a\tau b = b\tau a = e,$$

то говорят, что существует обратные элементы для всех элементов множества M с операцией τ.

4) Если для любого $a \in M$ существует элемент $b \in M$ такой, что

$$a\tau b = b\tau a = e,$$

то говорят, что существует обратные элементы для всех элементов множества M с операцией τ.

Примеры. Следующие алгебраические структуры ассоциативны $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{C}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}), + \rangle$.

Определение 3 *Произведением матриц $(a_{ij})_{n\times n}, (b_{ij})_{n\times n} \in \langle \mathbb{GL}_n, \cdot \rangle$ называется матрица $(c_{ij})_{n\times n}$ такая, что*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

для каждого $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Теорема 1 *Операция умножения в общей линейной группе $\langle \mathbb{GL}_n, \cdot \rangle$ ассоциативна.*

Доказательство. Для доказательства достато

2 Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах

2.1 Линейные операторы

2.2 Линейные операторы

2.3 Бинарная (двухместная) операция

2.4 Ассоциативность

2.5 Существование нейтрального элемента

2.6 Существование обратного элемента

2.7 Коммутативность

2.8 Группы и их свойства

Уравнение $ax = b$ имеет единственное решение

Верно $a^n a^m = a^{n+m}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Расстонвка скобок.

Не все свойства кольца действительных чисел $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ справедливы для остальных колец.

Пример. В $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ справедливо импликация $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$. В $\langle \mathbb{GL}_n(\mathbb{R}), +, \cdot \rangle$ это умозаключение не работает:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такие элементы кольца называются делителями нуля.

2.9 Кольца

2.10 Поля

3 Алгебраические структуры

Определение 4 *Любое множество с операцией или операциями на нем называется* алгебраической структурой.

Определение 5 *Если $A \subseteq B$, $\langle A, \tau \rangle$ и $\langle B, \tau \rangle$ — группы с одинаковыми операциями, то $\langle A, \tau \rangle$ называется* подгруппой *группы $\langle B, \tau \rangle$. Обозначается через $A < B$.*

Аналогичные определения справедливы для полугрупп, колец, полей и прочих алгебраических структур.

Приведем стандартный пример подгрупп $\langle \mathbb{Z}, + \rangle < \langle \mathbb{Q}, + \rangle < \langle \mathbb{R}, + \rangle < \langle \mathbb{C}, + \rangle$.

Менее тривиальный пример: $\langle c_n, + \rangle < \langle c_{2n}, + \rangle < \langle \mathbb{C}^*, + \rangle$. Заметим, что $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$ не является подгруппой $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, поскольку операции сложения в этих группах разные: $2 + 3 = 1$ в $\mathbb{Z}_4$, и $2 + 3 = 5$ в $\mathbb{Z}$.

3.1 Отношения. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности

Определение 6 *Любое подмножество $M \times M$ называется* отношением *на множестве M.*

Примеры. Отношение кратности $\vdots$

$4 \vdots 2$ по учебнику Воеводин В.В. Линейная алгебра — М.:Наука, 1980.

4 Исследовательская работа

Задачи на вычисления, упражнения на подсчеты не позволяют воспитать в студенте зрелого специалиста, способного решать сложные задачи реальной жизни. Поэтому студенту 2-3 курса полезно получить опыт исследовательской работы.

Зачет будет выставлен всем авторам оформленных исследований на оценку не ниже "удовлетворительно". Авторы работ на "отлично" получат "автоматы". Оценки за исследования выставляются на практических занятиях ноября и декабря.

Возможны, реферативные работы вместо исследовательских. В таком случае автор не может претендовать на оценку "отлично" на экзамене.

4.1 Требования к работе

1. Результатом исследовательской работы по алгебре может быть теорема, доказанная автором; гипотеза, найденная и сформулированная автором; алгоритмы, построенные автором; или сложные вычисления автора.

2. Результаты должны быть оформлены (см. пояснения к оформлению)

3. На практических занятиях студенту для доклада результатов отводится не более 10 минут. Докладчик перед выступлением предоставляет преподавателю письменно оформленные результаты (статью).

4. Научной новизны от автора не требуется, но должна быть субъективная новизна. Говоря понятнее, запрещается приписывать себе чужие работы.

4.2 Темы исследовательских работ

Темы для исследования необязательно выбирать из списка, можно придумать самому. Для предстоящей исследовательской работы можно решать задачи не только алгебры, но и прикладной математики и других разделов математики.

После появления первых результатов, покажите наработку лектору — он припишет эту тему вам. Работы по уже рассказанной теме не принимаются.

4.3 Пояснения к оформлению работ

Аннотация. Статья должна начинаться с краткого текста, состоящего из 1-4 предложений, поясняющего результаты автора. Этот текст называется аннотацией (an abstract). Здесь неуместно писать что-то кроме результатов.

1. *Показано, что матрица с неотрицательными элементами не может иметь неотрицательные собственные числа.*

2. *Доказано неравенство* $A + A^{-1} > 2E$.

3. *Вычислено число* π *с точностью до 10000 знака после запятой с помощью алгоритма Сузуки.*

Аннотация в научных статьях выполняет функцию бегущей строки в телевидении — объективно и кратко пишется информация. Заинтересовавшийся читатель возьмется за чтение, а остальные не будут терять время, вникая в суть статьи на нескольких страницах. При написании аннотации старайтесь использовать общепринятые термины.

Формулировка результатов. Если результаты были сформулированы с помощью общепринятых терминов, то нет необходимости дополнительно объяснять термины. Иначе нужно привести определения этих терминов, и затем, привести формулировку результата. Примеры

1. *Очередью будем называть* n*-значное натуральное число вида* $\overline{A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1}$ *такое, что все числа*

$$\overline{A_1},\ \overline{A_2 A_1},\ \overline{A_3 A_2 A_1},\ \dots, \overline{A_n A_{n-1} \dots A_2 A_1}$$

являются простыми.

Теорема 2 *Существует бесконечно много очередей.*

2. *Матрица A называется положительно определенной, что обозначают через $A > 0$, если для всех ненулевых векторов v скалярное произведение (Av, v) является положительным числом. Говорят, что справедливо неравенство $A > B$, если матрица $A - B$ положительно определена.*

   Теорема 3 *Для любой невырожденной матрицы A верно неравенство $A + A^{-1} > 2E$.*

3. *Множество собственных чисел линейного оператора (матрицы) называется спектром линейного оператора (матрицы).*

   Теорема 4 *Для любого множества M вещественных чисел существует линейный оператор со спектром M.*

4. *Радиусом множества называется наибольшая разница между ее элементами.*

   Теорема 5 *Для матрицы A с элементами из отрезка $[0; 1]$ радиус спектра не превышает 2.*

5. **Теорема 6** *В прямоугольном треугольнике гипотенуза всегда длинее катета.*

В последнем результате все термины общеизвестны, поэтому нет необходимости для пояснений.

Историческая справки и/или актуальность. После формулировки результатов следует рассказать историю вопроса: кто доказал и что доказано (вычислено, алгоритмизировано, замечено) впервые и наиболее важные результаты в данной области. Обязательны замечания про актуальность. Прикладные задачи обычно отмечаются как актуальные в силу некоторой полезности (приложимости к некоторой реальной проблеме). Теоретические задачи актуальны в

силу некоторого теоретического интереса к тем или иным математическим объектам или методам.

Примеры

1. *Решенная в статье проблема известна со времен Пифагора и Архимеда. Известны попытки Гаусса и Кантора решить эту задачу методами аналитической теории чисел. В данной работе проблема решена методами элементарной математики.*

2. *Данное неравенство имеет аналогию в числах. Числовое неравенство $x + x^{-1} \geqslant 2$ легко доказать с помощью выделения полного квадрата. Из этого неравенства и теории нормальных жордановых форм следует доказательство матричного неравенства $A + A^{-1} \geqslant 2E$. Таким образом, в данной работе показана схема вывода из числового неравенства матричного неравенства.*

3. *Изучение спектра матриц является важной задачей вычислительной математики, поскольку многие вопросы устойчивости разностных схем решаются с помощью анализа спектра матрицы.*

4. *Прямугольные треугольники, являются одним из простейших и основных фигур планиметрии. Неравенства на длины сторон треугольника позволяют решать многие неравенства планиметрии. Кроме этого, данное неравенство позволяет показать, что проекция точки A на прямую p имеет кратчайшее расстояние среди отрезков AB, где $B \in p$.*

4.4 Советы

1. Если исследование "не идет" и нет никаких навыков работы с подобными задачами, то поработай с литературой. Нужно посмотреть задачники с подобными задачами. Можно вникнуть в теорию из учебников.

2. Теперь методы вам знакомы, но исследование "не идет", попробуй упростить задачу и исследуй заново.

3. Если ничего не получается, то это сигнал, что вам точно необходимы навыки исследовательской работы. Для этого вам нужно успешно провести исследовательскую работу с хорошо вам известными математическими объектами: матрицы, определители, комплексные числа, многочлены второй степени. Для этого попроси задачи у лектора (eshamaev|a|mail.ru) по электронной почте. Не надо звонить на сотовый.

4.5 Темы исследовательских работ

Конкретные задачи.

Исследование спектра разностной схемы дифференциального оператора $\frac{d^2}{dx^2}$.

Исследование спектра разностной схемы дифференциального оператора $\frac{d^3}{dx^3}$.

Исследование спектра разностной схемы дифференциального оператора $\frac{d^2}{dx^2} - a\frac{d}{dx}$.

Изучение неравенства Гельдера при $p \to \infty$.

Изучение неравенства Минковского при $p \to \infty$.

Существует ли n и линейные операторы A и B в R^n такие, что каждый линейный оператор выражается в виде $cE + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n + b_1B + b_2B^2 + \ldots + b_nB^n$?

Для какого линейного оператора A в R^n пространство линейных операторов вида $cE + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$ имеет наибольшую размерность?

Чему равно наибольшее собственное число линейных операторов A заданных матрицей с элементами, не превосходящими 1 по модулю?

Чему равен наибольший радиус спектра линейного оператора A, заданной матрицей с элементами, не превосходящими 1 по модулю?

Невырожденность $A + E$ для кососимметричных A.

Кососимметричность обратной кососиметричной матрицы.

Матричное неравенство $A + A^{-1} > 2E$ для $A > 0$.

Для каких матриц $\lim_{n\to\infty} A^n \to 0$?

Для каких матриц $\lim_{n\to\infty} A^n \to E$?

Для каких матриц B существуют матрицы A такие, что $\lim_{n\to\infty} A^n \to B$?

Обратная матрица Вандермонда.

Матрицы A такие, что все элементы матриц A и A^{-1} не отрицательны.

Всегда ли ранги матриц A^TA и A совпадают?

Существуют ли матрицы A и B такие, что $AB - BA = E$?

Найти все многочлены с натуральными коэффициентами, обладающие свойством: $F(p)$ — простое при всяком простом p.

Обозначим через $S(y)$ сумму цифр числа y. Докажите, что существует бесконечно много номеров N, таких, что $S(2^N) > S(2^{n+1})$?

Один из игроков рисует на плоскости выпуклый N-угольник и записывает координаты некоторой точки. Второй может проводить произвольную прямую, а первый сообщает с какой стороны от нее расположена точка. Какое наименьшее число прямых всегда достаточно, чтобы определить, внутри или снаружи многоугольника находится точка?

Ограничена ли последовательность: $a_1 = 1, a_2 = x,, a_{n+1} = \frac{a_{n-1}a_{n-1}}{a_{n-1}}$, если $1 < x < 2$?

На ленте записана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что либо из нее можно вырезать 10 стозначных чисел, идущих в порядке убывания, либо какая-нибудь комбинация цифр повторяется 10 раз подряд.

Докажите, что неравенство $|2^x - 3^y| < 100$ имеет только конечное число решений.

Пусть A, B — целочисленные матрицы. Известно, что $\det A = 1$, $\det B \neq 0$. Докажите, что существует N, такое, что $B^{-1}A^nB$ — целочисленная матрица.

Найдите такое n, что в десятичной записи 5^n содержится по крайней мере 2010 нулей.

На плоскости отмечено бесконечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Тогда найдется выпуклая кривая, проходящая через его бесконечное подмножество. Доказать.

Если многочлен от нескольких переменных всюду неотрицателен, то он — сумма квадратов рациональных дробей. Доказать.

Можно ли на окружности радиуса 1 отметить 2010 точек так, чтобы длина любой соединяющей их хорды была рациональным числом?

При каких n и k существует замкнутая n-звенная ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно k раз?

В квадратном зале с зеркальными стенами стоит профессор Смит. Он хочет расставить в зале несколько студентов так, чтобы со своего места он не мог увидеть собственного отражения. Удастся ли профессору это сделать? Считать всех персонажей за точки.

Известно, что если зафиксировать одну переменную, то функция $F(x, y)$ по другой будет многочленом. Докажите, что $F(x, y)$ — многочлен от двух переменных.

Дан многогранник с $7n$ гранями. Найдется ли у него n граней с одинаковым числом вершин?

Докажите, что $S(11^n) \to \infty$ при $n \to \infty$.

Существует ли матрица 12×12, составленная из 0, 1, -1, определитель которой равен 2011?

Число 2^{n^2} может начинаться с любой комбинацией цифр. Доказать.

Может ли многочлен делящий $x^n - 1$ иметь 100 одним из своих коэффициентов? А если он неприводим?

Существует ли многочлен от двух переменных, устанавливающий взаимно-однозначное соответствие между натуральными числами и точками натуральной решетки? Тот же вопрос для пространства.

Докажите, что найдется такое n, что числа 2^n и 3^n одновременно начинаются с цифр 1000.

При каких k для любого n отношение суммы цифр n к сумме цифр nk ограничено?

Доказать, что существует бесконечно много n таких, что 2^n оканчивает на n.

Доказать, что для любого k существует окружность с центром в начале координат, на которой лежат ровно $4k$ точек с целыми координатами.

Могут ли 4 квадрата целых чисел образовать арифметическую прогрессию?

Среди значений, принимаемых многочленом $P(x)$ при натуральных значениях аргумента, встречаются все степени двойки. Докажите, что степень многочлена равна единице.

Найдите все многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ такие, что $P(Q(x)) = Q(P(x))$

Направления исследования.

Неравенства с симметрическими многочленами.

Если бы кососимметрическая матрица задавала бы скалярное произведение: симплектическая геометрия

Неравенства на собственные значения матриц $A = B + C$, B и C.

Неравенства на собственные значения матриц: круги Гершгорина

Матрица с элементами $0 < a_{ij} < 1$.

Неравенства на ранги матриц.

Реферативные темы.

Теория чисел в современных методах шифрования.

Неравенства с симметрическими многочленами.

Метод прогонки при решении разностных схем.

Итерационные методы вычисления наибольшего собственного числа матрицы.

Матричные неравенства.

Круги Гершгорина.

Неравенства на ранг матрицы.

Кососимметрические и симметрические матрицы.